

1. Измерение энергетических параметров и характеристик лазерного излучения / Под ред. А. Ф. Котюка. — М.: Радио и связь, 1981.
2. Говор И. Н.: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. — М., 1985.
3. Морозов Б. Н. и др. // Метрология. — 1973. — № 3. — С. 38.
4. Hashimoto S., Yamaguchi M. // CPEM Digest. — 1976. — P. 206.
5. Зельдович Б. Я., Клышко Д. Н. // Письма в ЖЭТФ. — 1969. — Т. 9. — № 2. — С. 69.
6. Малыгин А. И.: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. — М., 1984.
7. Домнин Ю. С. и др. // ТИИЭР. — 1986. — № 1. — С. 74.
8. Морозов Б. Н., Айвазян Ю. М. // Квантовая электроника. — 1980. — Т. 7 — № 1. — С. 5.
9. Акустические кристаллы / Под ред. М. П. Шапкольской. — М.: Наука, 1982.
10. Ward J. F., New G. H. C. // Proc. Royal Soc. London. — 1967. — V. 229A. — P. 238.
11. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. — М.: Изд. АН СССР, 1955.
12. Bass M. e.a. // Phys. Rev. Letts. — 1962. — V. 9. — N 7. — P. 446.
13. Качмарек Ф. Введение в физику лазеров. — М.: Мир, 1981.
14. Дальнова С. Н., Марков В. И. // ОМП. — 1977. — № 1. — С. 36.

**Интерференционные измерения**

684.765.572.089.52:531.5

**Особенности отклика лазерной интерференционной гравитационной антенны на низкочастотные возмущения**

А. Н. МОРОЗОВ, В. О. ГЛАДЫШЕВ

Широкое применение интерферометров Фабри—Перо для измерения малых относительных смещений как в прикладных [1], так и в фундаментальных [2] (например, регистрация гравитационных волн [3]) исследованиях требует изучения возможных механизмов трансформации низкочастотных шумовых возмущений в высокочастотные, близкие к частоте регистрируемого полезного сигнала. Такое рассмотрение приобретает существенный интерес в связи с созданием лазерных интерференционных гравитационных антенн, обладающих большой базой [4]. При этом большая стоимость, большие габаритные размеры и повышенная сложность изготовления и эксплуатации таких установок выдвигают на первый план необходимость аналитического описания трансформации низкочастотных сейсмических возмущений в область рабочих частот ( $\approx 1$  кГц) и проведения на этой основе оптимизации лазерных интерференционных гравитационных антенн для уменьшения уровня случайных погрешностей измерений.

Разрабатываемые сейчас лазерные интерференционные гравитационные антенны представляют собой интерферометр, построенный по схеме Майкельсона, каждое из плеч которого выполнено в виде резонатора Фабри—Перо. Зеркала резонатора  $S_1$ ,  $S_2$  ( $S_1$  — частично пропускающее зеркало) установлены на пробных телах, слабо связанных с основанием. Так как резонатор Фабри—Перо является многолучевым интерферометром, то давление света на зеркало  $S_2$  (а следовательно, и на пробное тело) существенно зависит от его возможного смещения в направлении оптической оси резонатора. Такие смещения могут возникать вследствие как низкочастотных микросейсмических [5], так и ряда других возмущений (тепловой шум, геомагнитные пульсации, воздействие космических лучей [6] и т. д.). Интересно рассмотреть возможность трансформации указанных низкочастотных возмущений в высокочастотные флуктуации регистрируемого интерферометром сигнала. Указанная трансформация может быть, в частности, вызвана нелинейностью уравнения движения пробного тела в поле светового давления.

Рассмотрим оптический резонатор Фабри—Перо, источником излучения для которого является лазер мощностью  $I_0$ , создающий на входе в резонатор амплитуду световой волны  $E_0$ . Пусть зеркало  $S_1$  характеризуется энергетическими коэффициентами отражения  $R_1$  и пропускания  $\eta_1$ , а зеркало  $S_2$  —

соответственно коэффициентами  $R_2$  и  $\eta_2$ , причем потери считаются малыми:  $1 - (R_i + \eta_i) \ll 1$ ,  $i = 1, 2$ . Предположим, что одно из пробных тел с установленным на нем зеркалом  $S_2$  испытывает нерегулярное воздействие, приводящее к его смещению от положения равновесия на величину  $x(t)$ . Тогда, принимая за положительное направление распространения луча, идущего от лазера, амплитуду  $n$ -го падающего на зеркало луча можно записать в виде

$$E_n = E_0 \sqrt{\eta_1} (R_1 R_2)^{(n-1)/2} \cos[\omega_c t + \varphi_0 + (n-1)\alpha - k(2L(n-1) + x(t) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x(t-i\Delta t))],$$

где  $\omega_c$  — циклическая частота излучения лазера;  $\varphi_0$  — начальная фаза;  $\alpha$  — суммарные потери фазы при однократном переотражении от зеркал резонатора;  $k$  — волновое число;  $L$  — невозмущенная длина резонатора;  $\Delta t \approx 2L/c$  — промежуток времени между очередными переотражениями луча зеркалом  $S_2$ ;  $c$  — скорость света. Для отраженного от зеркала  $S_2$  и вышедшего из резонатора лучей амплитуды соответственно равны

$$E'_n = \sqrt{R_2} E_n, \quad E''_n = \sqrt{\eta_1 R_2} E_n.$$

Силу давления света  $F(x, t)$  на зеркало  $S_2$  и мощность  $I(x, t)$ , вышедшего из резонатора излучения, будут характеризовать выражения

$$F(x, t) = (2I_0/cE_0^2)(1+R_2) \langle E^2 \rangle; \quad (1)$$

$$I(x, t) = (2I_0/E_0^2)R_2\eta_1 \langle E^2 \rangle,$$

где  $\langle E^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle (\sum_{n=1}^N E_0)^2 \rangle$ ,  $\langle \dots \rangle$  — операция усреднения за один период световой волны. Считая среднюю амплитуду колебаний пробного тела  $\langle A_x \rangle$  малой:  $\langle A_x \rangle \ll L$  ( $N_0$  — среднее число переотражений в резонаторе) и предполагая, что для резонатора имеет место соотношение  $2kL - \alpha = 2\pi\mu + \chi$  ( $\mu$  — целое число,  $\chi$  — фазовый сдвиг, характеризующий настройку резонатора), можно получить следующее выражение:

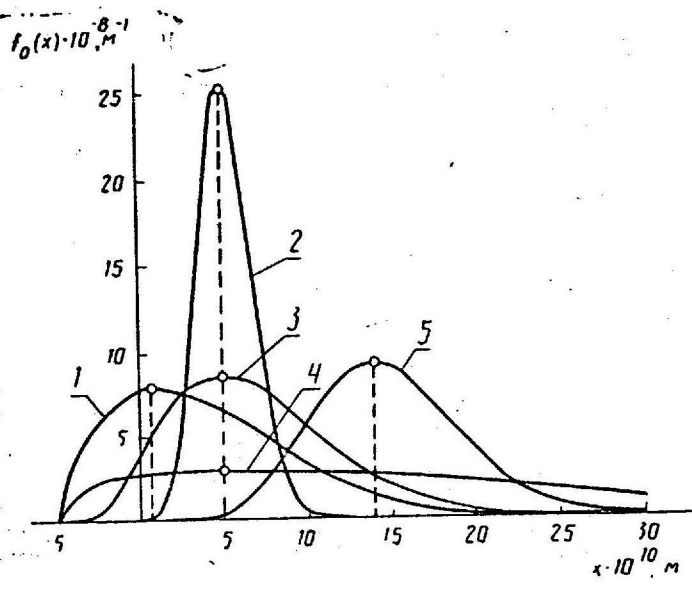


Рис. 1

Стационарное решение  $f(x, p)$  уравнения (6) представляет собой совместную плотность вероятности координаты  $x$  и импульса  $p$  пробного тела. Интегрирование функции распределения  $f(x, p)$  по всем возможным значениям импульса позволяет получить выражение для стационарного распределения флуктуаций пробного тела по координате  $x$ :

$$f_0(x) = S \exp[-(M\omega_0^2 x^2/2 - V(x))/W], \quad (7)$$

$$\text{где } S^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(M\omega_0^2 x^2/2 - V(x))/W];$$

$V(x) = -Mb/(x+r)$  — потенциальная энергия поля светового давления;  $W = 2\beta M/D$  — средняя энергия случайных колебаний пробного тела.

Функция распределения (7) отличается от гауссовской, что связано с нелинейным характером колебаний, описываемых (5), и указывает на возможность появления высокочастотных составляющих флуктуаций координаты пробного тела. На рис. 1 приведены рассчитанные по (7) графики  $f_0(x)$  для интерференционной гравитационной антенны с параметрами  $M = 10^2$  кг [8],  $\omega_0 = 20$  с $^{-2}$  при следующих значениях энергии случайных колебаний пробного тела  $W$  и коэффициента  $b$ , характеризующего параметры системы лазер-резонатор: 1 —  $W = 10^{-15}$  Дж,  $b = 10^{-27}$  Дж·м/кг; 2 —  $W = 10^{-16}$  Дж,  $b = 10^{-26}$  Дж·м/кг; 3 —  $W = 10^{-15}$  Дж,  $b = 10^{-26}$  Дж·м/кг; 4 —  $W = 10^{-14}$  Дж,  $b = 10^{-26}$  Дж·м/кг; 5 —  $W = 10^{-15}$  Дж,  $b = 10^{-25}$  Дж·м/кг. Из сравнения графиков следует, что при увеличении светового давления, характеризваемого параметром  $b$ , происходит смещение положения равновесия пробного тела (графики 1, 3, 5), приводящее к изменению рабочей точки резонатора, а повышение энергии  $W$  вызывает уширение функции распределения  $f_0(x)$  и усиление искажений ее формы по сравнению с распределением Гаусса (графики 2, 3, 4).

Для определения характера трансформации низкочастотных колебаний пробного тела в высокочастотные его флуктуации воспользуемся следующей методикой. Предположим, что после однократного внешнего импульсного воздействия, вызванного, например, прохождением сейсмической волны, пробное тело приобрело энергию  $W$ , диссипация которой происходит за время  $\tau \approx 1/\beta$ , в течение которого колебания можно считать свободными. Полагая колебательную систему достаточно высокочастотной  $\beta \ll \omega_0$ , ее период, соответствующий энергии  $W$ , можно определить по формуле [9]

$$T(W) = \int_{x_2}^{x_1} (\sqrt{2Mdx}/\sqrt{W - P_0(x)}),$$

где  $P_0(x) = M\omega_0^2 x^2/2 - V(x)$  — суммарная потенциальная энергия пробного тела в полях силы тяжести и светового давления;  $x_1$  и  $x_2$  — значения координаты, при которых потенциальная энергия  $P_0(x)$  становится равной  $W$ :  $P_0(x_1) = W$ .

Применительно к рассматриваемой системе период колебаний пробного тела принимает вид

$$T(W) = \frac{2}{\omega_0} \int_{x_2}^{x_1} (\sqrt{x+rdx}/\sqrt{-x^2-rx^2+a_1x-a_2}), \quad (8)$$

где введены следующие обозначения:  $a_1 = 2W/M\omega_0^2$ ,  $a_2 = 2(Mb - Wr)/M\omega_0^2$ .

Нахождение интеграла в (8) дает

$$T(W) = (2(x_2+r)/\omega_0) \sqrt{(x_1+r)(x_2-x_3)} \Pi(\pi/2, \rho, q), \quad (9)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — корни кубического уравнения, стоящего в знаменателе интеграла (8), причем  $x_1 > x_2 > x_3$ ;  $\Pi(\pi/2, \rho, q)$  — эллиптический интеграл 3-го рода;  $\rho = (x_2 - x_1)/(x_1 + r)$ ;

$$q = \sqrt{(x_2 - x_1)(x_3 + r)/(x_1 + r)(x_2 - x_1)}$$

Подстановка характерных значений системы лазер-резонатор ( $W = 10^{-14}$  Дж,  $b = 10^{-26}$  Дж·м/кг,  $\omega_0 = 4.5$  с $^{-2}$ ,  $r = 5 \cdot 10^{-10}$  м) в (9) позволяет определить период собственных колебаний, а следовательно и их частоту  $\omega = 2\pi/T(W) = 9.6$  с $^{-1}$ , которая оказывается более чем в два раза выше частоты  $\omega_0$ .

Свободные колебания пробного тела в течение времени  $\tau \leq 1/\beta$  после прохождения сейсмической волны могут быть описаны уравнением (5) при  $\xi(t) = 0$  и в приближении членом  $2\beta x$ , учитывающим затухание. Периодическое решение  $x(t)$ , получившегося таким образом уравнения, представимое [9] в виде ряда Фурье по собственной частоте  $\omega$ ;

$$\langle E^2 \rangle = (E_0^2/2) \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^N (R_1 R_2)^{n-1} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=m+1}^N (R_1 R_2)^{(n+m-1)/2} \cos(2k \sum_{l=m}^{n-1} x(t - i\Delta t) + (n-m)x) \right\rangle. \quad (2)$$

В случае, если колебания пробного тела низкочастотны и их граничная частота  $\nu_0 \ll 1/N_0 \Delta t$ , то  $x(t - i\Delta t)$  в (2) можно заменить на  $x(t)$ . С учетом того, что потери за один цикл переотражений луча в резонаторе  $\Delta = 1 - \sqrt{R_1 R_2}$  малы ( $\Delta \ll 1$ ), выражение (2) после проведения операции суммирования принимает простой вид

$$\langle E^2 \rangle = (E_0^2 \eta_1 / 2) / (\Delta^2 + 4(1 - \Delta) \sin^2(kx(t) + \pi/2)). \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) дает окончательные выражения для силы давления света на пробное тело  $F(x)$  и мощности вышедшего из резонатора излучения  $I(x)$ .

Если резонатор отъюстирован так, что  $\Delta \ll kx + \pi/2 \ll 1$ , а это соответствует рабочей точке для интерферометров Фабри-Перо, то выражение для силы давления света на пробное тело может быть представлено в виде

$$F(x) = (I_0 \eta_1 / 2ck^2) / (x+r)^2, \quad (4)$$

где введено обозначение  $r = \pi/2k$  и учтено, что  $1 - R_2 \ll 1$ .

Подстановка в (4) характерных для установок, строящихся в Калифорнийском и Массачусетском технологических институтах, параметров [4]  $I_0 = 10^2$  Вт,  $k \approx 10^7$  м $^{-1}$ ,  $\pi = 0.01$ ,  $\eta_1 = 10^{-3}$  дает  $F = 10^{-6} \dots 10^{-5}$  Н. Такая сила, учитывая ее нелинейную зависимость от  $x$ , может существенно изменить характер движения пробного тела.

Уравнение колебаний пробного тела в поле светового давления можно записать в виде

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x - b/(x+r)^2 = \xi(t), \quad (5)$$

где  $\beta$  — коэффициент затухания;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний пробного тела в отсутствии светового давления;  $b = I_0 \eta_1 / 2Mck^2$ ;  $\xi(t)$  — вынуждающая сила;  $M$  — масса пробного тела. Если  $\xi(t)$  возможно аппроксимировать белым гауссовым шумом с интенсивностью  $2D$  (это может быть, например, микросейсмический шум), то для (5) можно построить уравнение Фоккера-Планка [7], дающее функцию распределения  $f(x, p, t)$  флуктуаций координаты  $x$  и импульса  $p = M\dot{x}$  пробного тела:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (p/M) \frac{\partial f}{\partial x} + [Mb/(x+r)^2 - 2\beta p - M\omega_0^2 x] \frac{\partial f}{\partial p} - 2\beta f = D \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \quad (6)$$

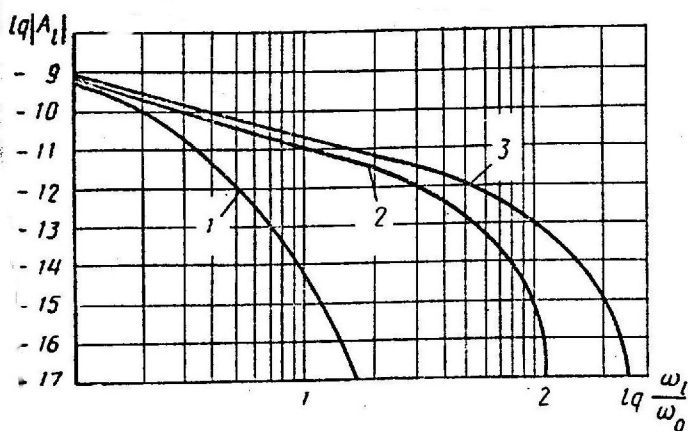


Рис. 2

$$x(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos i\omega t. \quad (10)$$

Подстановка (10) в рассматриваемое уравнение свободных затухающих колебаний пробного тела дает

$$\begin{aligned} (A_0 + r)^2 \omega_0^2 A_0 - b + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k A_k \cos k\omega t + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_i A_k \cos i\omega t \cos k\omega t + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k A_i A_j A_k \cos i\omega t \cos j\omega t \cos k\omega t = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

где  $\alpha_k = (A_0 + r)^2 \gamma_k + 2(A_0 + r)\omega_0^2 A_0$ ;  $\beta_k = 2(A_0 + r)\gamma_k + \omega_0^2 A_0$ ;

$$\gamma_k = \omega_0^2 - k^2 \omega^2.$$

Считая, что  $A_1 < A_0 + r$  и  $A_{i+1} < A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , соотношение (11) после группировки членов, имеющих одинаковую частоту  $\omega_k = l\omega$ , и учета малости членов, содержащих амплитуды  $A_i$  при  $i > l$ , позволяет определить рекуррентную формулу для амплитуды  $A_l$  выше первого порядка:

$$\begin{aligned} A_l = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i+k=l} \beta_{k,i} A_i A_k - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{i+j \leq l} A_i A_j (\gamma_{i+j-l, l} A_{i+j-l} + \\ + 2\gamma_{i,l} A_{i+j-l}) - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^{i+j+k=l} A_i A_j A_k \gamma_{k,l}, \quad l = \overline{2, n}, \quad (12) \end{aligned}$$

где  $\beta_{k,i} = \beta_k / \alpha_i$ ,  $\gamma_{k,i} = \gamma_k / \alpha_i$ , а  $\sum_{i,k=1}^{i+k=l}$  означает суммирование всех членов с  $i \geq 1$ ,  $k \geq 1$  при условии, что  $i+k=l$ .

Для непосредственного вычисления амплитуды  $A_l$  по (12) необходимо задаться значениями  $A_0$  и  $A_1$ , которые зависят от  $V$  и  $b$ . Величина стационарного смещения может быть в первом приближении оценена по положению максимума графиков, приведенных на рис. 1, а амплитуда первой гармоники  $A_1$  связана с энергией  $W$  приближенным соотношением:  $V \approx Mb / (A_0 + r) + M\omega_0^2 A_1^2 / 2$ .

Задавшись значениями  $b = 10^{-26}$  Дж·м/кг,  $W = 10^{-15} - 10^{-14}$  Дж,  $r = 5 \cdot 10^{-10}$  м (при этом  $A_0 = 5 \cdot 10^{-10}$  м, а  $A_1 = (5-10) \cdot 10^{-10}$  м) и считая другие параметры системы лазер-резонатор близкими к параметрам строящихся гравитационных антенн, проанализируем зависимость амплитуды колебаний от частоты  $|A_i(\omega)|$ .

На рис. 2 приведены в логарифмической шкале графики зависимости  $|A_i(\omega)|$  при следующих значениях  $A_i$ : 1 —  $A_1 = 0,5(A_0 + r)$ ; 2 —  $A_1 = 0,9(A_0 + r)$ ; 3 —  $A_1 = 0,95(A_0 + r)$ . Как следует из приведенных графиков, амплитуда сотой гармоники  $A_{100}$  для случая  $A_1 = 0,9(A_0 + r)$  находится на уровне порядка  $10^{-15}$  м, а при  $A_1 = 0,95(A_0 + r)$  достигает примерно  $10^{-13}$  м. При возрастании энергии случайных низкочастотных колебаний пробного тела амплитуда высокочастотных гармоник также увеличивается и может превысить в рабочем диапазоне частот около 1 кГц предполагаемый уровень чувствительности ( $\Delta x = 2 \cdot 10^{-15}$  м) для строящихся гравитационных антенн. Уровню чувствительности  $\Delta x = 2 \cdot 10^{-15}$  м соответствуют вариации метрики  $h \approx 10^{-20}$  при базе интерферометра  $L = 4 \cdot 10^3$  м.

Результаты ряда работ, в которых обсуждаются эксперименты по излучению влияния различных шумов [10], в том числе микросейсмических [5], позволяют сделать вывод о реальности указанных значений энергии низкочастотных случайных колебаний пробного тела.

Таким образом, рассмотренный механизм трансформации низкочастотных колебаний пробного тела в высокочастотные его флуктуации может существенно ограничить чувствительность лазерных интерференционных гравитационных антенн. При этом, как следует из (1) и (3), предложенный механизм, связанный с давлением света на пробное тело, приводит к нерегулярным высокочастотным флуктуациям мощности  $I$  вышедшего из резонатора Фабри-Перо светового излучения и, следовательно, к увеличению уровня высокочастотного шума гравитационной антенны. Для уменьшения влияния указанного механизма высокочастотной стохастизации необходимо при создании интерференционных гравитационных антенн либо уменьшать мощность лазерного источника света  $I_0$ , либо увеличивать параметр  $\chi$ , сдвигая рабочую точку резонатора в область меньшей чувствительности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коронкевич В. П., Ленкова Г. А. // Автотметрия. — 1972. — № 6. — С. 69.
2. Richard J.-P. // J. Appl. Phys. — 1988. — V. 64. — N 4. — P. 2202.
3. Кулагин В. В., Руденко В. Н. // Метрология. — 1986. — № 8. — С. 10.
4. Brillat A. // Ann. de Phys. — 1985. — V. 10. — P. 219.
5. Abramović A. e. a. Experimental test of a prototype active cavity gravitational wave detector «Proc. Fourth Marcel Grossmann Meet. Gen. Relativity, 1986, Part B», — 1988. — P. 1287.
6. Витушкин Л. Ф. и др. // Оптика и спектроскопия. — 1987. — Т. 63. — № 5. — С. 1167.
7. Морозов А. Н. // Измерительная техника. — 1986. — № 11. — С. 17.
8. Fabbro R. e. a. // Phys. Lett. A. — 1988. — V. 132. — N 5. — P. 237.
9. Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. — М.: Наука, 1985.
10. Shoemaker D. e. a. // Phys. Rev. D. — 1988. — V. 38. — N 2. — P. 423.

## ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В дополнение к статье Л. В. Власова и др. «Комплексная межотраслевая программа метрологического обеспечения световых измерений и ее реализация» («Измерительная техника», 1989 г., № 11, с. 29) сообщаем, что в Ленинградском ЦСМ аттестован рабочий эталон единиц силы света и освещенности.