ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
№ 2 ФИЗИКА 2002

УДК 539.12

*А.Н. МОРОЗОВ, В.О. ГЛАДЫШЕВ*

# ОПИСАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ МЕТРИЧЕСКИМ ТЕНЗОРОМ

В работе предсказан эффект уширения спектра электромагнитного излучения, распространяющегося в четырехмерном пространстве-времени с флуктуациями кривизны пространства, обусловленными существованием реликтового гравитационного излучения. Показано, что искажение профилей спектральных линий электромагнитного излучения, вызванное флуктуирующей метрикой, находится на уровне достигнутой разрешающей способности спектральной аппаратуры.

Постановка задачи описания физических процессов в пространстве-времени с изменяющимся случайным образом метрическим тензором связана с возможностью возникновения флуктуаций кривизны пространства вследствие сложения большого количества гравитационных волн, имеющих различные амплитудные и спектральные характеристики. При этом, с учетом того, что гравитационные волны генерируются различными, некоррелированными между собой астрофизическими объектами, такими, как нейтронные звезды, черные дыры и т.д., а также что они возникают при гравитационном коллапсе и вспышках сверхновых [1], модель случайно изменяющегося метрического тензора для описания пространства-времени представляется достаточно обоснованной. Тем более что предлагаемая модель применима для описания стохастического фона, вызванного, в частности, реликтовым гравитационным излучением [2].

В самой общей постановке задача описания физических процессов в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором может быть сформулирована следующим образом. Пусть в пространстве-времени протекает какой-либо физический процесс, например происходит распространение электромагнитной волны. Будем считать, что метрический тензор $g_{ik}\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ представляет собой случайную функцию координат $x^l = \left\{x^0, x^1, x^2, x^3\right\}$. Требуется определить характер протекания исследуемого физического процесса в случае, если метрический тензор $g_{ik}\left(x^l\right)$ изменяется случайным образом с течением времени и при сдвиге в пространстве.

Для построения уравнений, описывающих протекание физических процессов в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором, можно воспользоваться методом, изложенным в работе [3]. Уравнения электромагнитного поля в искривленном пространстве-времени позволяют проанализировать, в частности, особенности распространения электромагнитных волн в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором.

Далее рассмотрим случай описания распространения света в приближении геометрической оптики. Указанный случай может иметь место при выполнении условия малости длины волны света $\lambda_0$, по сравнению с характерными размерами $\delta L$ флуктуаций метрического тензора: $\lambda_0 \ll \delta L$. Уравнение, описывающее распространение света в искривленном пространстве-времени для случая приближения геометрической оптики, имеет вид [3]

$$\frac{dk^i}{d\chi} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0, \tag{1}$$

где $k^i$ – четырехмерный волновой вектор; $\chi$ – параметр, изменяющийся вдоль луча; $\Gamma^i_{kl}$ – символы Кристоффеля, которые выражаются через метрический тензор следующим образом:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{2}$$

В формулах (1), (2) и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Метрический тензор $g_{ik}$ является симметричным: $g_{ik} = g_{ki}$.

Тензор $g^{lk}$ связан с тензором $g_{il}$ соотношением

$$g_{il} g^{lk} = \delta^k_i, \tag{3}$$

$\delta_i^k$ – единичный тензор или дельта-функция Кронекера.

Далее будем рассматривать случай, когда метрический тензор $g_{ik}$ считается мало отли-

ющимся от галилеевой метрики $g_{ik}^{(0)}$:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}\,, \tag{4}$$

$|\,h_{ik}(x^l)\,| << 1$; $g_{00}^{(0)} = 1$; $g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = -1$; $g_{ik}^{(0)} = 0$ при $i \neq k$. Тогда символы Кристоффеля в первом приближении можно представить в виде

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g_{(0)}^{im}\left(\frac{\partial h_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^m}\right), \tag{5}$$

где $g_{(0)}^{im} = g_{im}^{(0)}$.

Следуя работе [4], решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$k^i = k_{(0)}^i + k_{(1)}^i + \ldots, \tag{6}$$

где $|\,k_{(1)}^i\,| << |\,k_{(0)}^i\,|$.

Тогда в нулевом приближении уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dk_{(0)}^i}{d\chi} = 0\,. \tag{7}$$

Следовательно $k_{(0)}^i = \mathrm{const}$.

В первом приближении интегрирование уравнения (1) дает

$$k^i(\chi) = k_{(0)}^i + k_{(1)}^i(0) - k_{(0)}^k k_{(0)}^l \int_0^{\chi} \Gamma_{kl}^i d\chi\,. \tag{8}$$

Выражение для четырехмерного вектора $k_{(1)}^i(0)$ может быть получено из условия [3]

$$g_{ik} k^i k^k = 0 \tag{9}$$

в первом приближении имеет вид

$$k_{(1)}^i = -\frac{1}{2} g_{(0)}^{im} h_{ml}(0) k_{(0)}^l\,. \tag{10}$$

Тогда решение (8) приобретает окончательную форму:

$$k^i(\chi) = k_{(0)}^i - \frac{1}{2} g_{(0)}^{im} h_{ml}(0) k_{(0)}^l - k_{(0)}^k k_{(0)}^l \int_0^{\chi} \Gamma_{kl}^i d\chi\,. \tag{11}$$

Так как вектор $k^i$ может быть представлен в виде [3]

$$k^i = \frac{dx^i}{d\chi}, \tag{12}$$

в нулевом приближении имеем

$$x^i(\chi) = k_{(0)}^i \chi + x^i(0)\,. \tag{13}$$

Рассмотрим распространение луча света в направлении оси $x^1$. Тогда можно считать, что омпоненты вектора $k_{(0)}^i$ имеют следующие значения: $k_{(0)}^0 = k_{(0)}^1 = k_0$, $k_{(0)}^2 = k_{(0)}^3 = 0$, где $k_0$ – оновое число. Считая расстояние, которое прошел свет, $l = x^1(\chi) - x^1(0)$, по формуле (13) при =1 получим выражение для параметра $\chi$:

$$\chi = \frac{l}{k_0}\,. \tag{14}$$

Сделанные предположения позволяют по формуле (11) получить следующие выражения:

$$\frac{k^{\alpha}(l)}{k_0}=1-\frac{1}{2}(-1)^{\alpha}(h_{0\alpha}(0)+h_{1\alpha}(0))-\int_0^l\left(\Gamma^{\alpha}_{00}+2\Gamma^{\alpha}_{01}+\Gamma^{\alpha}_{11}\right)dl,\quad \alpha=0,1; \qquad (15)$$

$$\frac{k^{\beta}(l)}{k_0}=\frac{1}{2}\left(h_{0\beta}(0)+h_{1\beta}(0)\right)-\int_0^l\left(\Gamma^{\beta}_{00}+2\Gamma^{\beta}_{01}+\Gamma^{\beta}_{11}\right)dl,\quad \beta=2,3, \qquad (16)$$

где учтена симметрия символов Кристоффеля $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$.

Формулы (15) и (16) при подстановке в них выражения для символов Кристоффеля (5) позволяют записать выражения для относительных флуктуаций частоты $\delta\omega$ и волнового вектор $\delta k^{\alpha}$ в точке наблюдения:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0}=\frac{\delta k^0}{k_0}=-\frac{1}{2}(h_{00}(0)+h_{01}(0))+\int_0^l\left(\frac{1}{2}\frac{\partial(h_{11}-h_{00})}{\partial x^0}-\frac{\partial(h_{00}+h_{01})}{\partial x^1}\right)dl; \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta k^{\alpha}}{k_0}&=\frac{1}{2}(h_{0\alpha}(0)+h_{1\alpha}(0))+\\&+\int_0^l\left(\frac{\partial(h_{0\alpha}+h_{1\alpha})}{\partial x^0}+\frac{\partial(h_{0\alpha}+h_{1\alpha})}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial(h_{00}+2h_{01}+h_{11})}{\partial x^{\alpha}}\right)dl,\quad \alpha=\overline{1,3}.\end{aligned} \qquad (18)$$

Учитывая то, что, согласно формуле (13), с учетом (14) можно записать: $dx^1=dl$, проинтегрируем второе слагаемое в интеграле выражения (17). Тогда имеем

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{2}(h_{00}(0)+h_{01}(0))-h_{00}(l)-h_{01}(l)+\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\partial(h_{11}-h_{00})}{\partial x^0}dl. \qquad (19)$$

Представим тензор $h_{ik}$ в виде

$$h_{ik}=h\xi_{ik},\quad i,k=0,1, \qquad (20)$$

где $h$ – амплитуда флуктуаций тензора $h_{ik}$; $\xi_{ik}=\xi_{ik}\left(x^0,x^1\right)$ – случайное поле с единичной амплитудой и радиусом корреляции $\delta L<\lambda_0$. В этом случае все слагаемые, стоящие перед интегралом в выражении (19), будут иметь величину порядка $h$.

Оценим характерные значения интеграла в выражении (19). Так как использование приближения геометрической оптики ограничено предельным значением характерных размеро корреляции $\delta L\approx\lambda_0=1/k_0$ и постоянной времени корреляции $\delta\tau\approx1/\omega_0$, то оценка дисперси флуктуаций частоты, описываемой интегралом в формуле (19), принимает вид

$$\sigma^2_{\omega}\approx h^2lk_0 \qquad (21)$$

или

$$h\approx\frac{\sigma_{\omega}}{\sqrt{lk_0}}. \qquad (22)$$

При $l>>1/k_0$ вклад интеграла в флуктуации частоты света становится определяющим.

Проведем оценки уширения спектральной линии при прохождении света через пространство с флуктуирующей метрикой. Если считать величину $l$ примерно равной характерному размеру Вселенной, $l\approx10^{25}\ldots10^{26}$ м (1…10 млрд световых лет), $k_0=10^7$ рад/м, а минимально регистрируемое уширение спектральной линии $\sigma_{\omega}\approx10^{-6}\ldots10^{-8}$, то рассчитанная по формуле (22) амплитуда флуктуаций будет иметь значение $h\approx10^{-22}\ldots10^{-24}$.

Таким образом, при распространении света на расстояние, сопоставимое с размерами Вселенной, в случае существования флуктуаций метрики с амплитудой $h\approx10^{-22}\ldots10^{-24}$ и частотой ограниченной сверху частотой световой волны, должно наблюдаться уширение профилей спектральных линий. Регистрация необратимого процесса уширения спектральных линий може являться одним из доказательств существования в природе гравитационных волн.

Если описание осуществляется в синхронной системе отсчета [3], как это обычно делаетс при расчете воздействия плоских гравитационных волн в рамках линейной теории [4], то из условия лоренцевой калибровки следует

$$h_{00} = h_{0i} = 0\,. \tag{23}$$

Тогда выражение (19) для относительных флуктуаций частоты света приобретает вид

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0}\, dl\,. \tag{24}$$

Считая, что гравитационные волны, заполняющие пространство, имеют граничную частоту $\omega_g$ и соответствующее ей волновое число $k_g$, дисперсию флуктуаций частоты света можно оценить по формуле

$$\sigma_\omega \approx h\sqrt{lk_g} \approx h\sqrt{\frac{l\omega_g}{c}}\,, \tag{25}$$

где $h$ – характерная амплитуда гравитационных волн.

Анализ выражения (25) позволяет сделать заключение, что потенциально регистрируемые флуктуации частоты света могут возникать в случае, если существуют достаточно высокочастотные гравитационные волны, в частности реликтовое гравитационное излучение, связанное с процессами вблизи космологической особенности. Разрешающая способность, необходимая для регистрации уширения профилей линий, находится на уровне достигнутого в исследовательских лабораториях спектрального разрешения $10^6...10^8$ и ниже теоретической разрешающей способности на несколько порядков [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schutz B.F. // Class. Quantum Graw.– 1989.– V.6.– P.1761–1780.
2. Грищук Л.П., Липунов В.М., Постнов К.А. и др. // УФН.– 2001.– Т.171.– №1.– С.3–59.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.– М.: Наука, 1973.– 504 с.
4. Бичак И., Руденко В.Н. Гравитационные волны в ОТО и проблемы их обнаружения.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.– 264 с.
5. Белл Р.Дж. Введение в фурье-спектроскопию: Пер. с англ.– М.: Мир, 1975.– 380 с.

Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 07.12.01.