

# **НЕРАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ**

**МОРОЗОВ АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ**

## СВОЙСТВА НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

- существенно нелинейная зависимость от параметров состояния;
- большой уровень флуктуаций;
- сильная зависимость от предыстории;
- существенное влияние других необратимых процессов;
- плохая предсказуемость.

# ОПИСАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Примеры дифференциальных уравнений:

- второй закон Ньютона;
- уравнения Максвелла;
- уравнения гидродинамики;
- описание диффузии и теплопроводности;
- описание броуновского движения;
- уравнение Шредингера;
- уравнение радиоактивного распада.

# ОПИСАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод описания основан на решении дифференциального уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$X(t)|_{t=0} = X_0 \quad (2)$$

## ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial p} D \left( \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{p}{mkT} f \right) \quad (3)$$

с начальным условием

$$f(p, r, t)|_{t=0} = f_0(r, p) \quad (4)$$

## ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Решить уравнение

$$\frac{dX}{dt} + \alpha X = F(t) \quad (5)$$

с начальным условием

$$X(t)|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

Решение

$$X(t) = \int_0^t \exp(-\alpha(t-\tau))F(\tau)d\tau \quad (7)$$

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Линейное интегральное уравнение

$$X(t) = \int_0^t G(t - \tau)F(\tau)d\tau \quad (8)$$

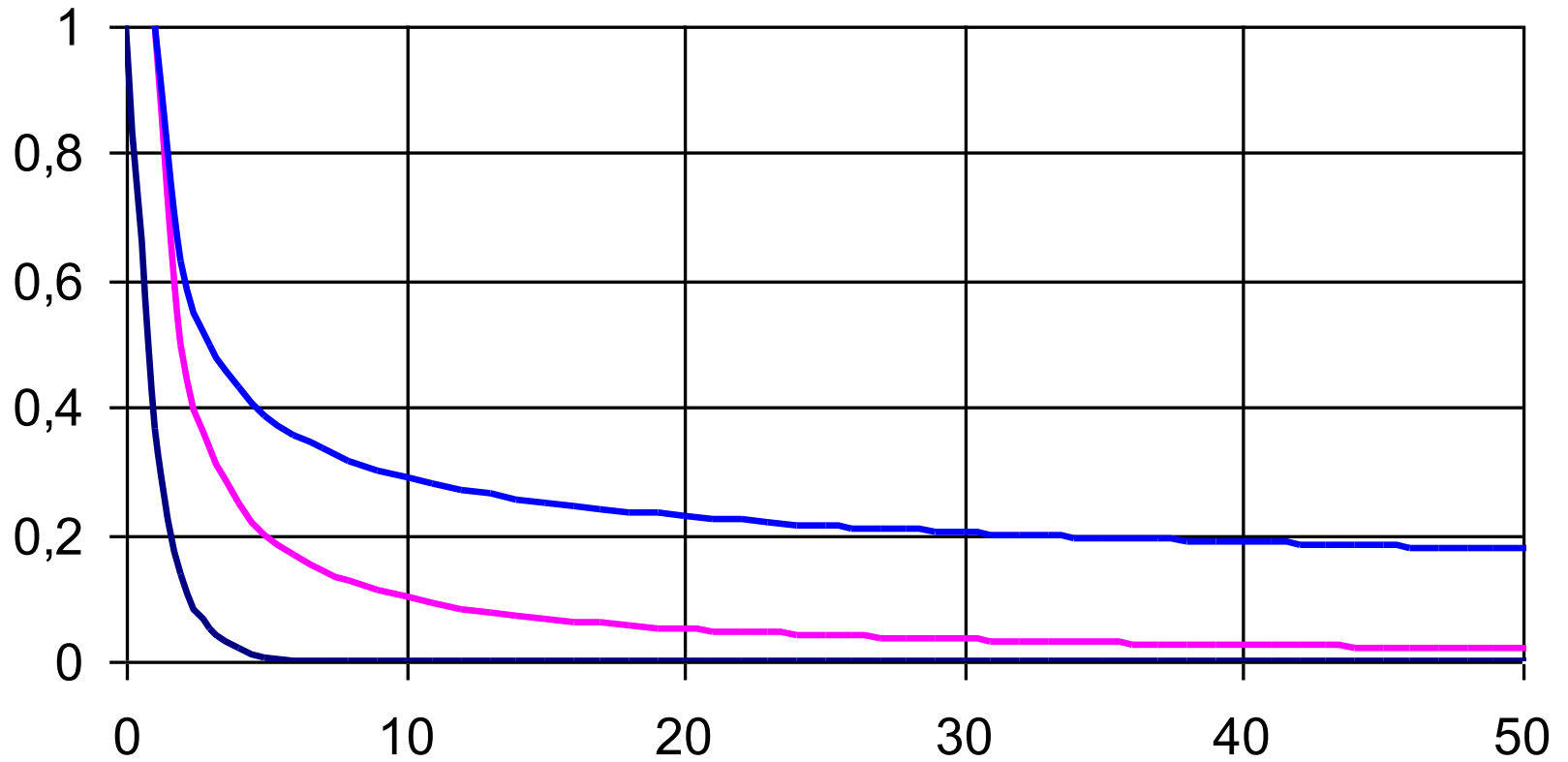
Примеры ядер интегрального уравнения

1)  $G(t - \tau) = \exp(-(t - \tau))$  (9)

2)  $G(t - \tau) = 1/(t - \tau)$  (10)

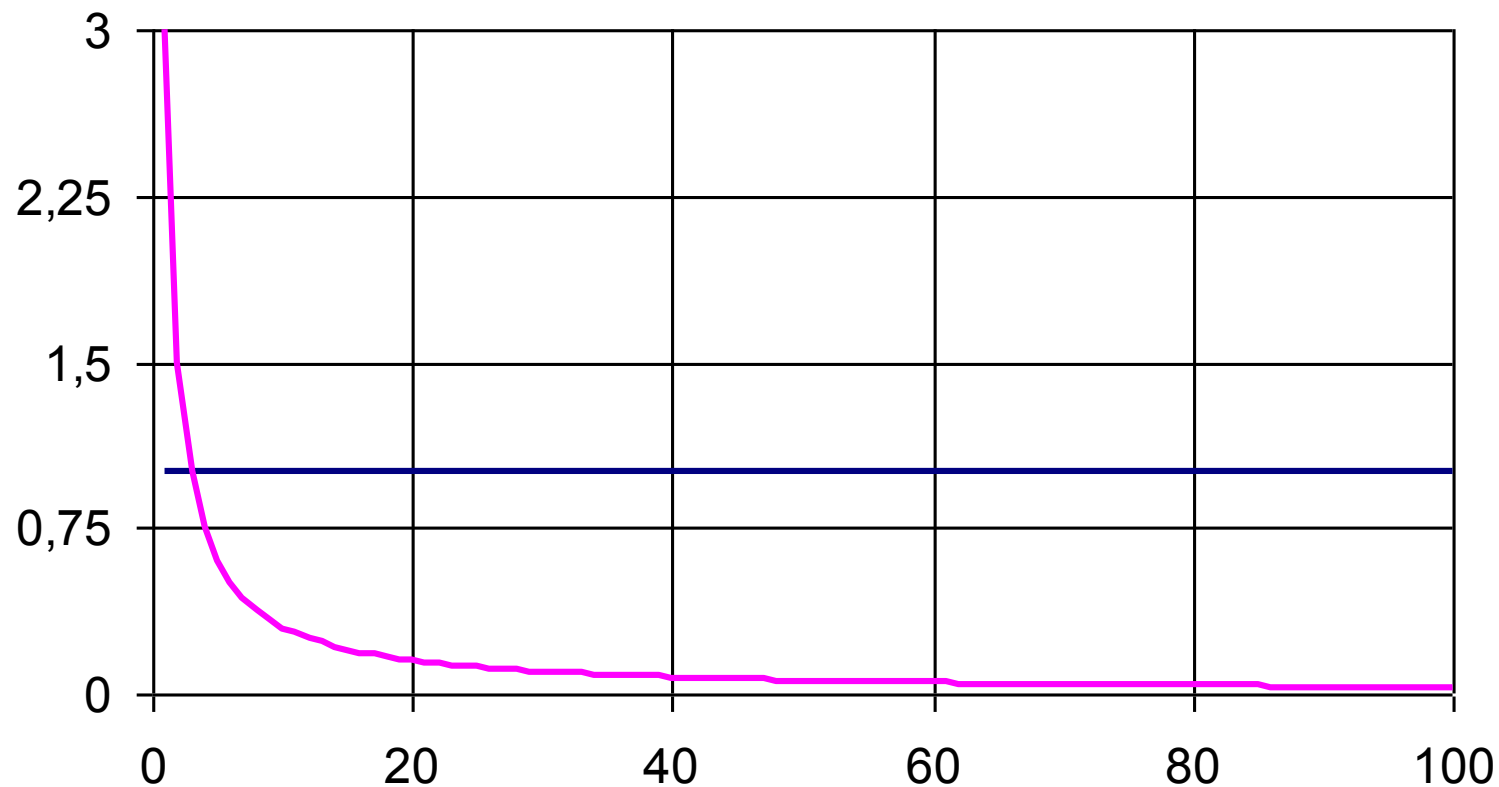
3)  $G(t - \tau) = 1 - \ln(1 + (t - \tau))$  (11)

# ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ ЗАБЫВАНИЯ





## СОПОСТАВЛЕНИЕ БЕЛОГО И ФЛИККЕР ШУМОВ

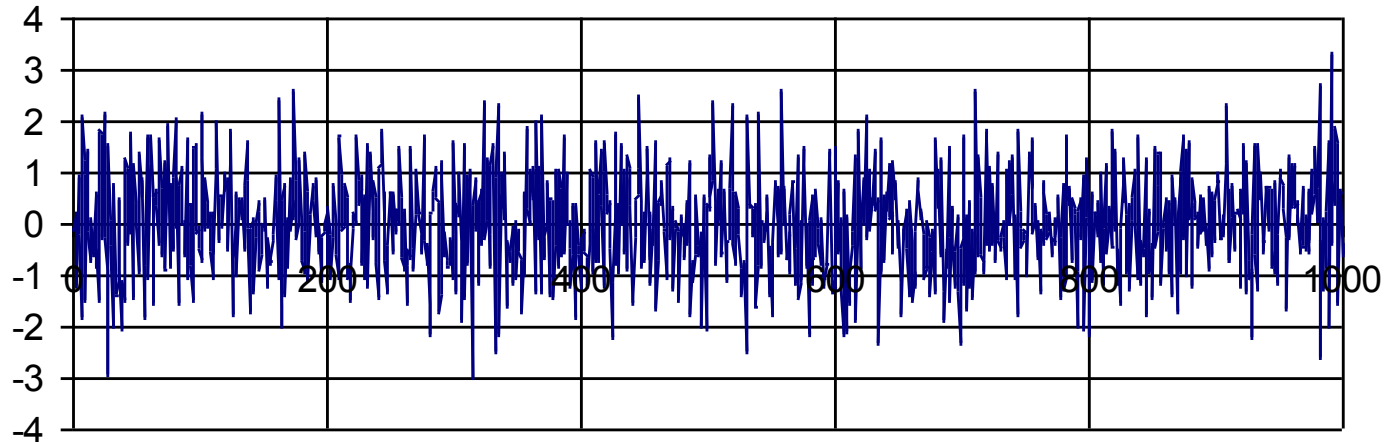


Белый шум  $G(\omega) = C$  (12)

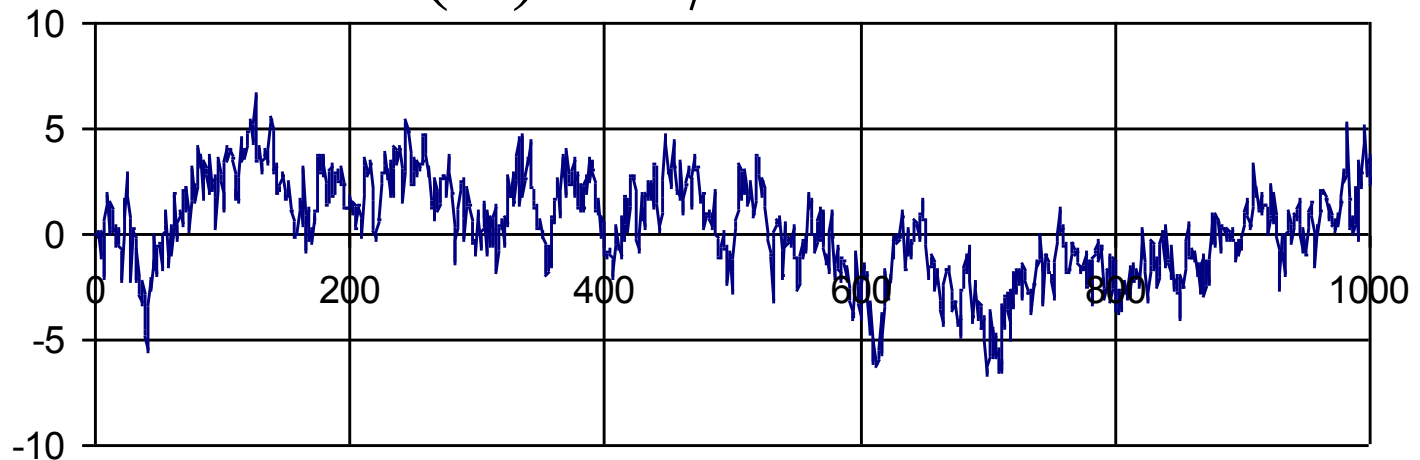
Фликкер шум  $G(\omega) = A/\omega$  (13)

# СОПОСТАВЛЕНИЕ БЕЛОГО И ФЛИККЕР ШУМОВ

Белый шум  $G(\omega) = C$



Фликкер шум  $G(\omega) = A/\omega$



## БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Уравнение движения частицы в вязкой среде

$$M \frac{dV}{dt} = F(t) + F_c(t) + \xi_V(t), \quad (14)$$

где

$$F_c(t) = -\gamma V(t). \quad (15)$$

Спектральная плотность шума  $\xi_V(t)$

$$G_M = 2\gamma M kT. \quad (16)$$

Спектральная плотность флуктуаций скорости  $V(t)$

$$G_V(\omega) = \frac{\beta}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad (17)$$

где  $\beta = 2\gamma kT/M$ ,  $\alpha = \gamma/M$ .

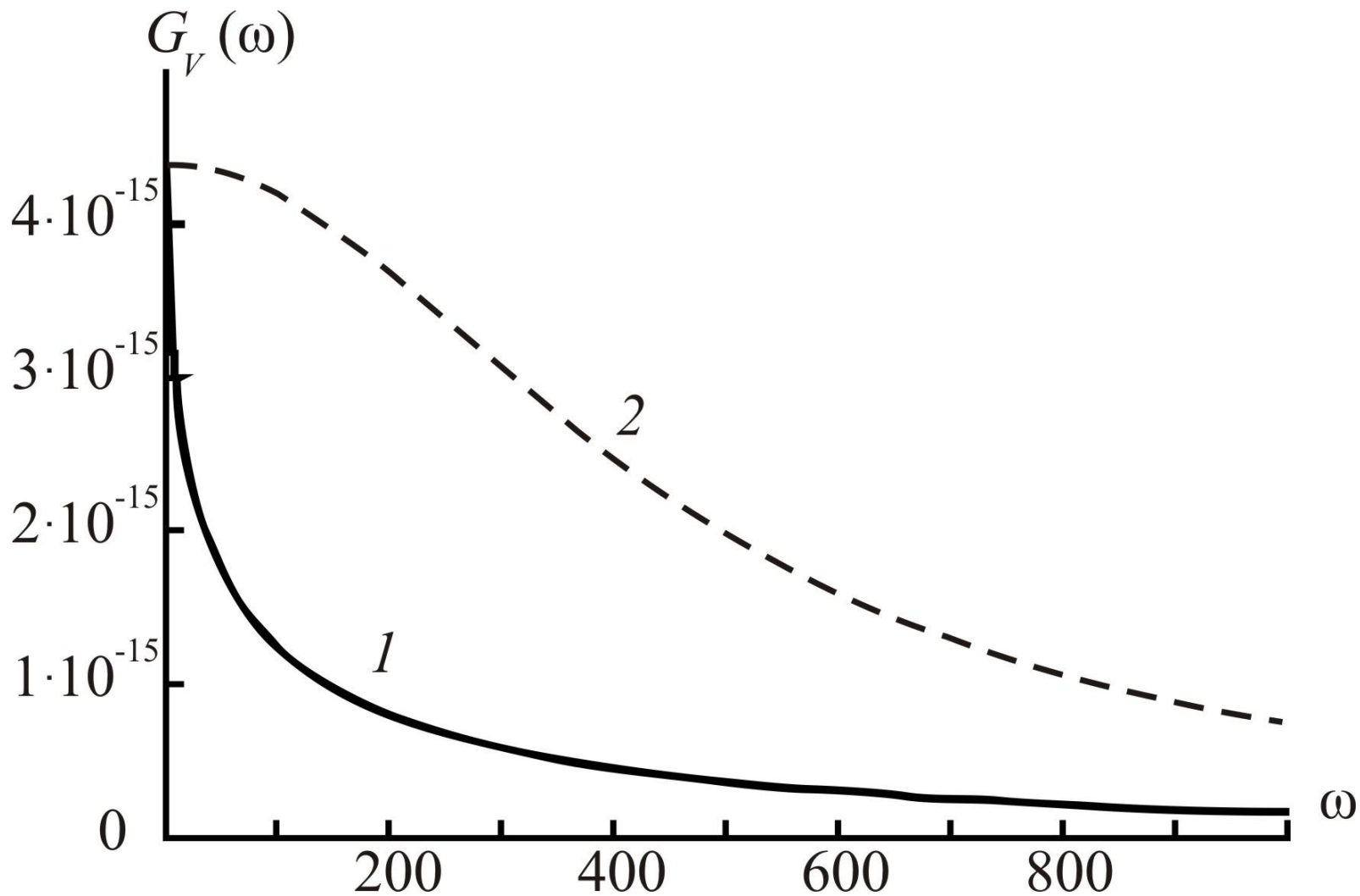
# БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ШАРООБРАЗНОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Сила вязкого трения

$$F_c(t) = -2\pi\eta R^3 \left[ \frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (18)$$

Спектральная плотность флуктуаций скорости

$$G_V(\omega) = \frac{G_\xi}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2B^2\pi\omega + A^2B\sqrt{2\pi\omega} + A^2}. \quad (19)$$



Графики спектральных плотностей,  
задаваемые формулами (17) (кривая 2) и  
(19) (кривая 1)

## НЕМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Примеры немарковских процессов, наблюдаемых в природе и технике:

- фликкер-шум, наблюдаемый в процессах, имеющих различную физическую природу;
- флуктуации кинетических коэффициентов (например, флуктуации коэффициентов диффузии, вязкости и теплопроводности);
- результат интегрирования марковского случайного процесса, в частности, координата броуновской частицы, вычисляемая как интеграл от её скорости;

- отклик динамической системы при воздействии на неё марковского случайного процесса;
- результат измерений с помощью динамической измерительной системы;
- радиотехнические сигналы при их амплитудной и фазовой модуляции совокупностью детерминированных и случайных процессов;
- результат нахождения скользящего среднего от процесса с независимыми значениями;
- результат фильтрации (как временной, так и частотной) марковского случайного процесса.

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение Ито

$$dZ = -\alpha Z dt + dW(t), \quad (20)$$

где  $W(t)$ - процесс с независимыми приращениями.  
Интегральное представление

$$Z(t) = \int_0^t \exp(-\alpha(t - \tau)) dW(\tau). \quad (21)$$

Уравнение для характеристической функции

$$\frac{\partial g_L}{\partial t} = -\alpha \lambda \frac{\partial g_L}{\partial \lambda_L} + \chi(\lambda_L; t_L) g_L \quad (22)$$



## Решение уравнения

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ \sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \chi \left( \sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)); \tau \right) d\tau \right] \quad (23)$$

Для винеровского процесса  $W(t)$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ -\frac{\nu}{2\alpha} \sum_{l,k=1}^L \left( \lambda_l \lambda_k \left( \exp(-\alpha|t_l - t_k|) - \exp(-\alpha(t_l + t_k)) \right) \right) \right] \quad (24)$$

Для пуассоновского процесса  $W(t)$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ \nu \sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left( g \left( \sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)) \right) - 1 \right) d\tau \right] \quad (25)$$

# НЕМАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, ЗАДАВАЕМЫЙ ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Связь плотности термодинамических потоков  $J_i$  и термодинамических сил  $X_k$

$$J_i(t) = \int_0^t G_{ik}(t, \tau) X_k(\tau) d\tau \quad . \quad (26)$$

При

$$G_{ik}(t, \tau) = 2L_{ik} \delta(t - \tau) \quad (27)$$

выражение (26) приобретает вид алгебраического равенства

$$J_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} X_k \quad . \quad (28)$$

# Интегральное преобразование

$$Z(t) = \int_0^t G(t, \tau) dW(\tau). \quad (29)$$

## Характеристическая функция

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ \int_0^{t_L} \chi \left( \left( \sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) d\tau \right]. \quad (30)$$

## Случаи винеровского и пуассоновского процессов

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \nu \sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{\min(t_l, t_k)} G(t_l, \tau) G(t_k, \tau) d\tau \right], \quad (31)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ \nu \int_0^t \left( g \left( \sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right) - 1 \right) d\tau \right]. \quad (32)$$

## ФЛИККЕР-ШУМ

Если ядро интегрального преобразования

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t - \tau}}, \quad (33)$$

то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \nu \left( \sum_{l=1}^L \left( \lambda_l^2 \ln \frac{t}{\delta t} \right) + 4 \sum_{\substack{l, k=1 \\ l > k}}^L \left( \lambda_l \lambda_k \ln \frac{\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k} + \delta t + \sqrt{\delta t}} \right) \right) \right]. \quad (34)$$

Спектр шума

$$G(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{2\pi\nu}{\omega}. \quad (35)$$

# НЕОБРАТИМЫЕ НЕМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В рамках теории немарковских процессов описаны:

- броуновское движение;
- диффузия;
- теплопроводность;
- тепловое излучение;
- люминесценция;
- реология;
- флуктуации кинетических коэффициентов.

# НЕМАРКОВСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Уравнение для осциллятора

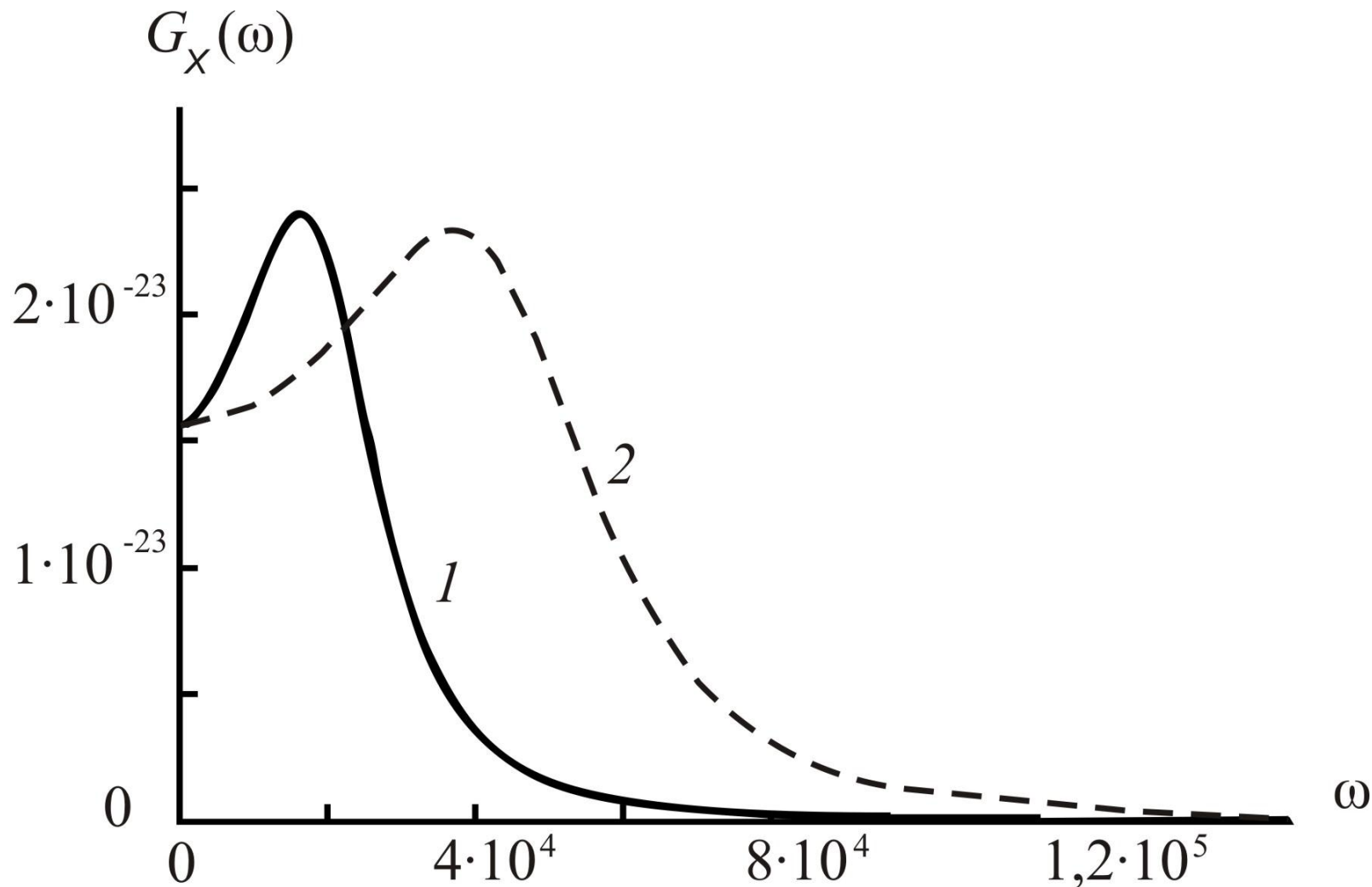
$$Z(t) + A \int_0^t \left( 1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}} \right) Z(\tau) d\tau = -\tilde{k}X(t) + \tilde{\xi}(t). \quad (36)$$

Спектральная плотность флуктуаций координаты

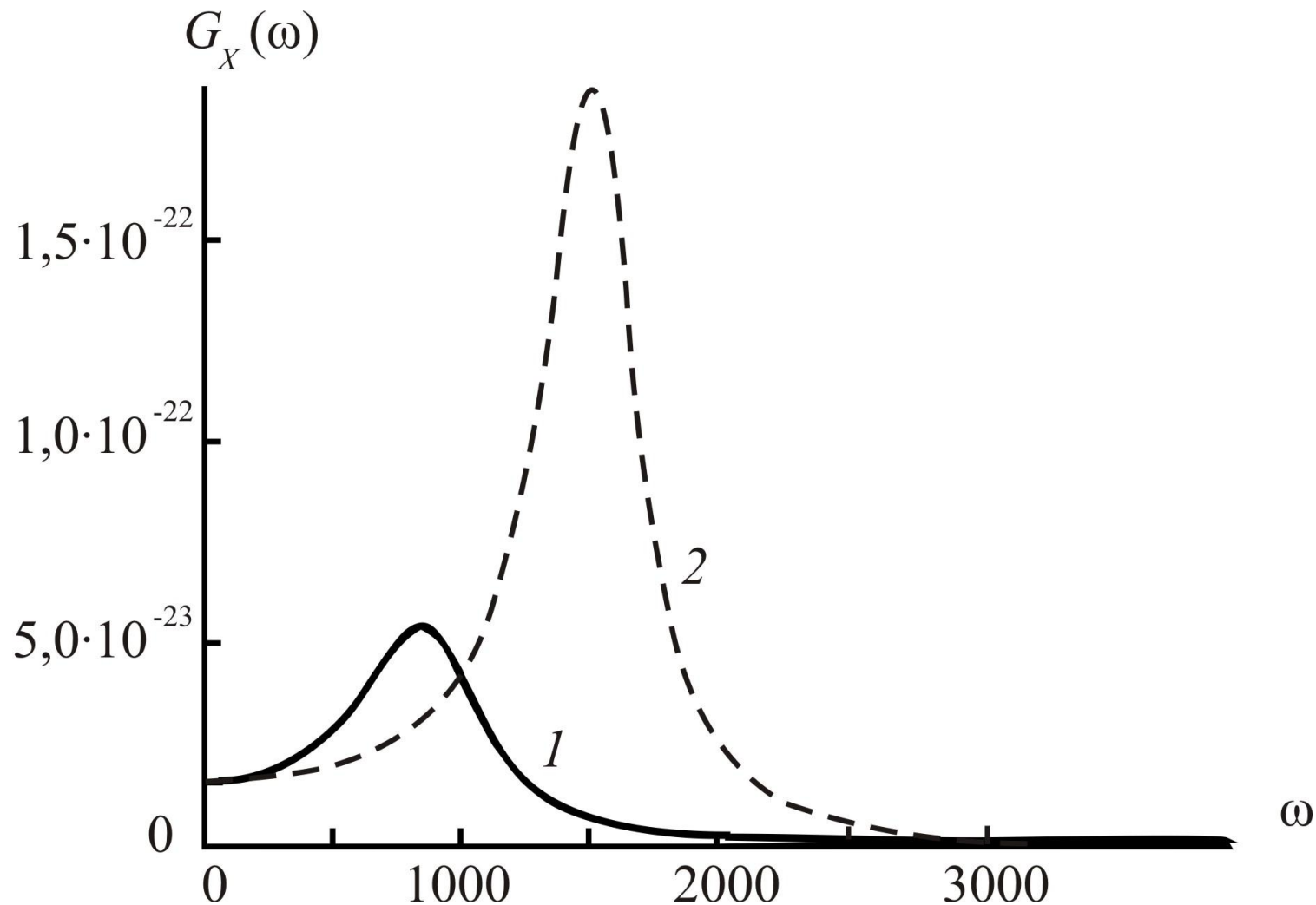
$$G_X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\tilde{\xi}}. \quad (37)$$

Спектральная плотность для классического осциллятора

$$G_X^{\text{клас}}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + (A'^2 - 2k')\omega^2 + k'^2} G'_{\tilde{\xi}}. \quad (38)$$



Графики спектральных плотностей,  
 задаваемые выражениями (37) (кривая 1) и  
 (38) (кривая 2) при  $R = 10$  мкм



Графики спектральных плотностей,  
 задаваемые выражениями (37) (кривая 1) и  
 (38) (кривая 2) при  $R = 100$  мкм



# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНОСТИ СОСТОЯНИЯ

Формула Найквиста

$$\sigma_U^2 = 4RkT\Delta f \quad (39)$$

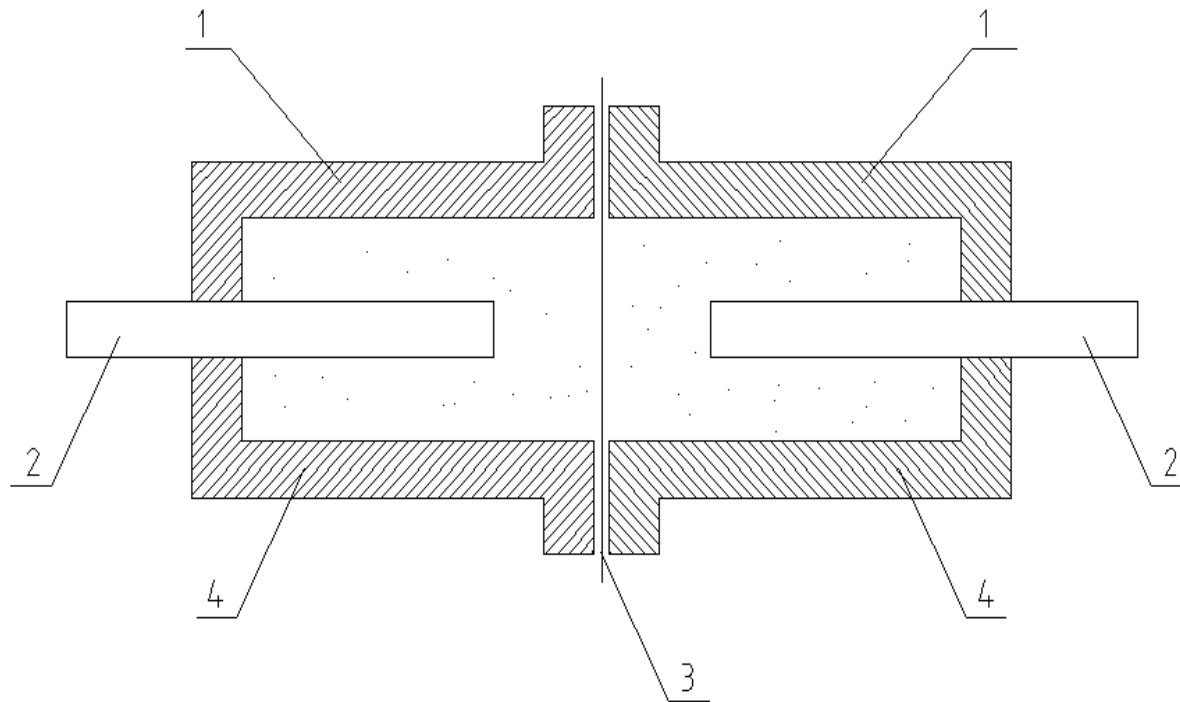
Мера Кульбака

$$H_U = \int_{-\infty}^{\infty} f(U) \ln[f(U)/f_0(U)] dU \quad (40)$$

где

$$f_0(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_U}} \exp\left[-\frac{U^2}{2\sigma_U^2}\right] \quad (41)$$

# ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ЯЧЕЙКА



- 1 – сосуды с электролитом, 2 – электроды,  
3 – тонкая лавсановая пленка с отверстиями,  
4 - электролит

# ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ ЯЧЕЕК с 19 мая по 1 сентября 2009 года

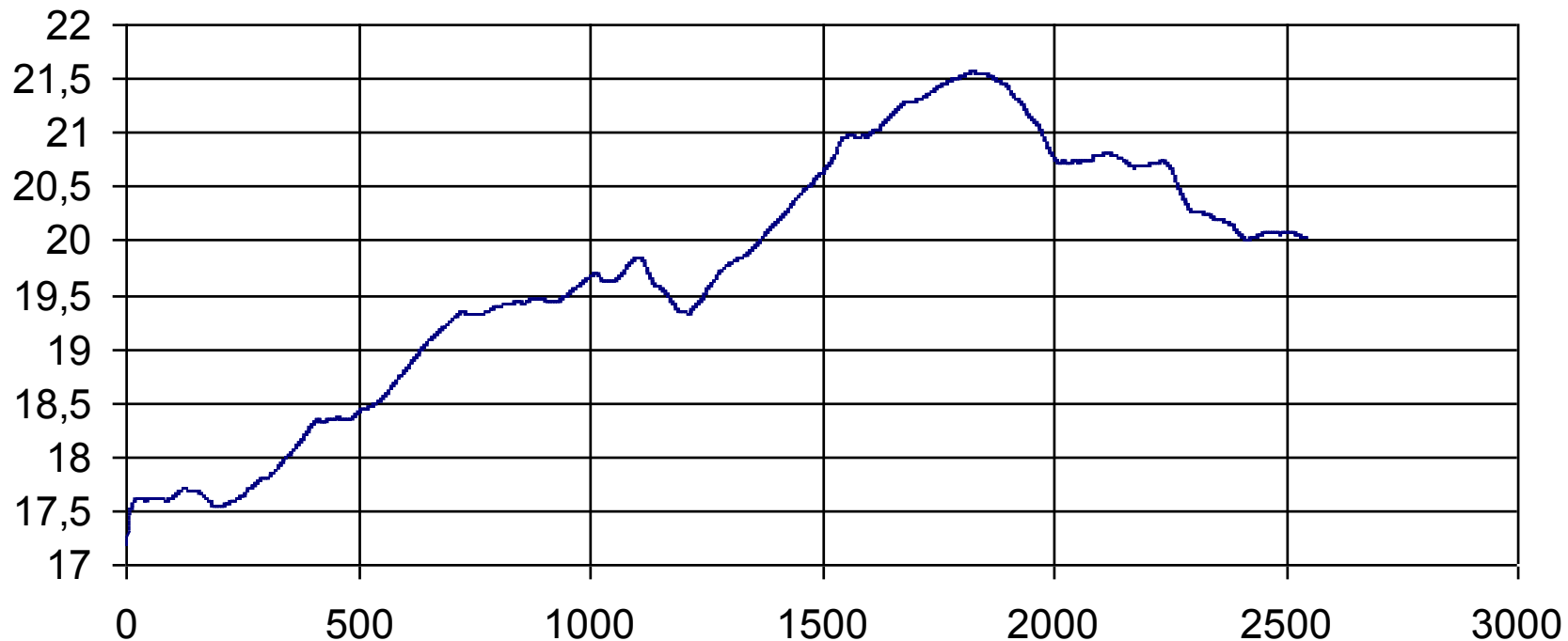
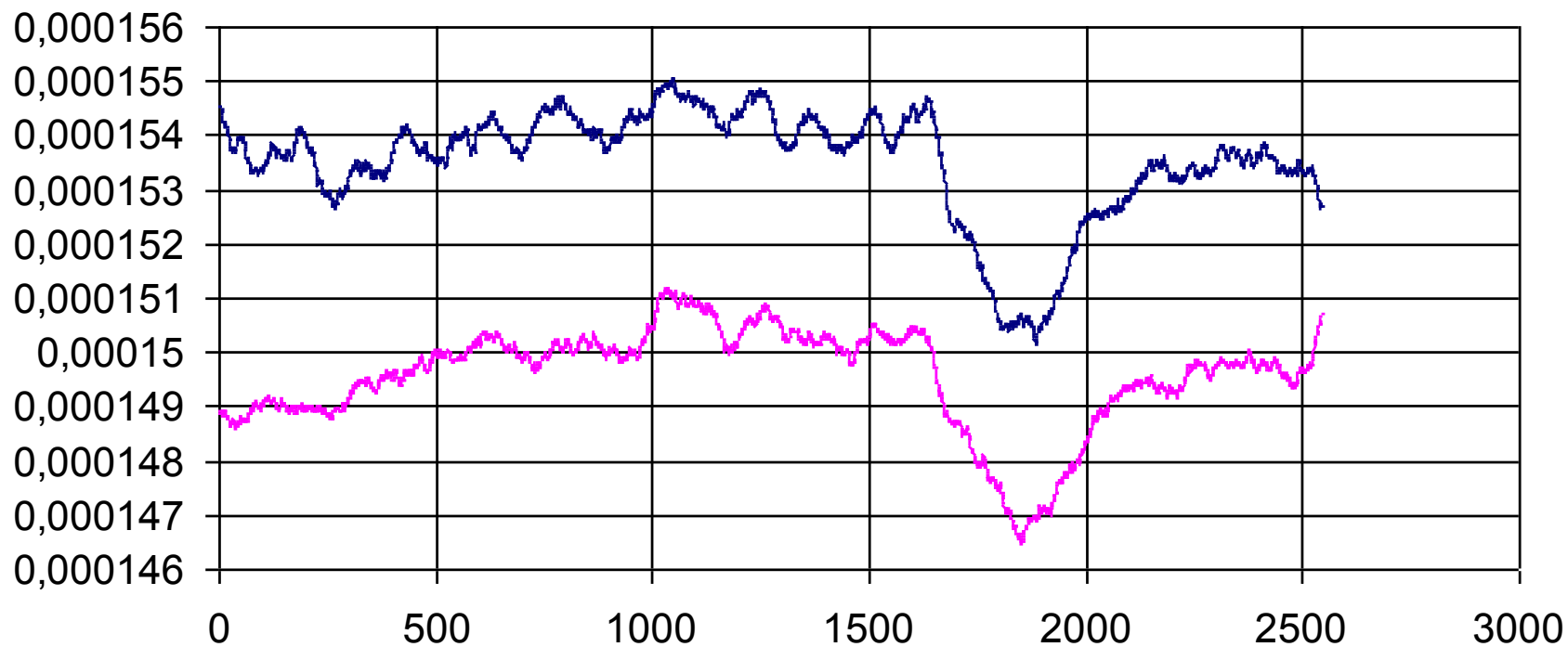


График зависимости температуры

# ИЗМЕНЕНИЕ МЕРЫ КУЛЬБАКА ФЛУКТУАЦИЙ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ ЯЧЕЙКАХ с 19 мая по 1 сентября 2009 года



Графики зависимостей меры Кульбака  
для двух установок

## РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Показано, что описание физических процессов с помощью дифференциальных уравнений имеет существенные ограничения.
2. Разработан метод описания необратимых процессов как немарковских.
3. Проведено описание ряда необратимых процессов с использованием интегральных преобразований.
4. Выполнены долговременные измерения меры Кульбака флуктуаций напряжения на электролитической ячейке.