НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Броуновское движение плоской поверхности в неньютоновской среде

06, июнь 2013

DOI: 10.7463/0613.0586338

Морозов А. Н., Скрипкин А. В.

УДК 532.135, 519.216

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

amor@mx.bmstu.ru

skripkin@mail.ru

1. Введение

Динамическое описание броуновского движения осуществляют, как правило, с использованием уравнения Ланжевена, в котором внешнее случайное воздействие среды учитывается посредством введения стохастической силы (ланжевеновского источника), представляющей собой дельта-коррелированный случайный процесс с нулевым средним значением [1]. Уравнение Ланжевена для скорости $V(t)$ броуновского тела имеет вид

$$M\frac{dV(t)}{dt}=F_0(t)+F_r(t)+\xi_V(t), \tag{1}$$

где M – масса тела, $F_r(t)$ – сила сопротивления со стороны среды, $\xi_V(t)$ – случайная сила, $F_0(t)$ – сумма остальных (детерминированных) сил.

При движении броуновской частицы в вязкой среде традиционно предполагают, что сила $F_r(t)$ пропорциональна скорости движения

$$F_r(t)=-\gamma V(t), \tag{2}$$

где γ – коэффициент трения. Такой подход делает уравнение (1) стохастическим дифференциальным уравнением, с помощью которого можно найти любые статистические характеристики процесса, используя хорошо разработанную теорию стохастических дифференциальных систем [2].

Соотношение (2) не учитывает того факта, что броуновская частица увлекает окружающие ее частицы среды, которые, в свою очередь, начинают оказывать влияние на ее движение. При учете такого увлечения [3] сила сопротивления (2) дополняется слагаемым, пропорциональным производной скорости и соответствующим инертным свойствам среды, а также интегральным слагаемым, ответственным за наследственные свойства броуновского движения. Немарковское описание броуновского движения, в котором сила сопротивления имеет указанный характер, проведено в работе [4].

Описание движения плоской поверхности в вязкой среде принципиально учитывает увлечение окружающих частиц среды. Если среда имеет ньютоновские свойства, то сила сопротивления, действующая на единицу площади такой поверхности, определяется формулой

$$F_r(t) = \eta_1 \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \tag{3}$$

где η_1 – вязкость среды, $u(x,t)$ – скорость частиц среды. В уравнении (3) считается, что поверхность расположена в плоскости $x = 0$, а ее одномерное движение осуществляется перпендикулярно оси *Ox* (рис. 1).

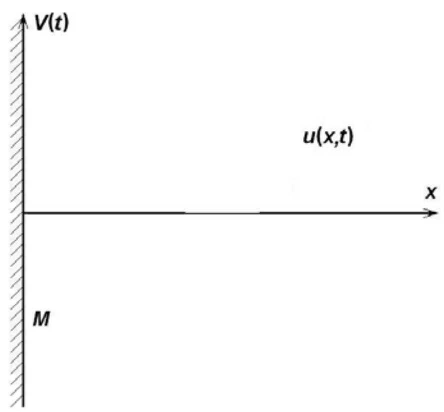

Рис. 1. Поверхность в неньютоновской жидкости

Дополненное уравнением для скорости среды $u(x,t)$ при $x > 0$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где ν – кинематическая вязкость, а также начальным и граничным условиями

$$u(x,0) = 0, \tag{5}$$

$$u(0,t) = V(t), \tag{6}$$

можно получить выражение для $u(x,t)$ в виде [5]

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right]V(\tau)d\tau\,. \tag{7}$$

Из соотношений (3) и (7) для силы сопротивления, действующей на единицу площади поверхности, имеем

$$F_r(t)=-\frac{\eta_1}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\frac{dV(\tau)}{d\tau}d\tau\,. \tag{8}$$

Описание броуновского движения плоской поверхности в вязкой ньютоновской среде с силой (8) проведено в работе [6], в которой показано, что флуктуации скорости поверхности в этом случае имеют характер фликкер-шума.

2. Неньютоновская среда

Многие среды проявляют ярко выраженные неньютоновские свойства. В этом случае уравнение (3) заменяется на выражение вида [7]

$$F_r(t)=\eta^*\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^{1+\alpha}\Bigg|_{x=0}, \tag{9}$$

где η^* – эффективная вязкость, а параметр α определяет неньютоновские свойства среды (при $\alpha>0$ жидкость относится к классу дилетантных, при $\alpha<0$ – псевдопластичных). В дальнейшем будем считать величину этого параметра малой: $|\alpha|<<1$.

Представим $\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^{1+\alpha}$ в виде

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^{1+\alpha}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^{k+1}u(x,t)}{\partial\alpha^k\partial x}. \tag{10}$$

Считая, что неньютоновские свойства среды существенны лишь в некотором слое шириной δ, соответствующем характерному расстоянию затухания возмущения среды; принимая после этого, что вблизи поверхности $\Delta\alpha=-\frac{1}{\delta}\Delta x$, и полагая также, что уравнение для скорости среды (7) по-прежнему справедливо, получим

$$F_r(t)=\eta_1\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}+\eta_3\left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0}. \qquad (11)$$

В последнем выражении, ввиду того, что производные четного порядка $\left.\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=0}$ равны нулю, оставлены первые два ненулевых слагаемых (10), а параметр

$$\eta_3=\frac{1}{2}\delta^2\alpha^2\eta_1. \qquad (12)$$

Тот факт, что в последнее соотношение для величины η_3 параметр α входит во второй степени, приводит к тому, что в рассматриваемой модели влияние как дилетантной, так и псевдопластичной сред на характер движения поверхности одинаково.

Из уравнения (11) найдем окончательно выражение для силы сопротивления, действующую на единицу поверхности, движущейся в неньютоновской жидкости

$$F_r(t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\left(\frac{\eta_1}{(t-\tau)^{1/2}}+\frac{\eta_3}{2\nu(t-\tau)^{3/2}}\right)\frac{dV(\tau)}{d\tau}d\tau. \qquad (13)$$

Подстановка (13) в соотношение (1) приводит к следующему уравнению Ланжевена для свободной ($F_0(t)=0$) поверхности

$$Z(t)+\frac{1}{M\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\left(\frac{\eta_1}{(t-\tau)^{1/2}}+\frac{\eta_3}{2\nu(t-\tau)^{3/2}}\right)Z(\tau)d\tau=\frac{1}{M}\xi_V(t), \qquad (14)$$

где введено обозначение

$$Z(t)=\frac{dV(t)}{dt}. \qquad (15)$$

а M – масса единицы площади поверхности, $\xi_V(t)$ – случайная сила, действующая на единичную площадь.

Интегральное уравнение Вольтерра второго рода (14) не сводится к конечной системе дифференциальных уравнений, поэтому процесс $Z(t)$ (а вместе с ним и процесс $V(t)$) относятся к классу немарковских случайных процессов [8].

3. Характеристическая функция и моменты

Найдем характеристическую функции процесса $Z(t)$, воспользовавшись методом описания немарковских процессов, задаваемых линейными интегральными операторами, разработанным в [9]. Получим

$$g_1(\lambda;t)=\exp\left[-\frac{1}{2M^4\pi\nu}\sigma\lambda^2\left(\eta_1^2\ln\frac{t}{\delta t}+\frac{\eta_3^2}{8\nu^2}\left(\frac{1}{\delta t^2}-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{\eta_1\eta_3}{\nu}\left(\frac{1}{\delta t}-\frac{1}{t}\right)\right)\right]. \qquad (16)$$

Здесь σ – интенсивность случайного воздействия $\xi_V(t)$, а параметр δt – характерное время, соответствующее времени хаотизации среды, и которое может быть оценено с помощью формулы

$$\delta t=\frac{1}{c}\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{1/3}, \qquad (17)$$

где c – скорость звука в вязкой среде, μ и ρ – молярная масса и плотность жидкости соответственно, N_A – число Авогадро.

Формула (16) показывает, что в установившемся процессе броуновского движения поверхности в неньютоновской среде ($t\to\infty$) основной вклад в статистические свойства вносит логарифмическое слагаемое, соответствующее движению поверхности в ньютоновской среде. Таким образом, по истечении значительного времени после начала движения поверхности, на ее поведение неньютоновские свойства среды не будут оказывать практически никакого влияния. Кроме того, ввиду слабого изменения логарифмической функции установившегося процесса за некоторый конечный промежуток времени, экспериментальные исследования установившегося движения поверхности практически дадут стационарные значения его статистических характеристик. График функции $g_1(\lambda;t)$ при различных значениях времени t изображен на рис. 2.

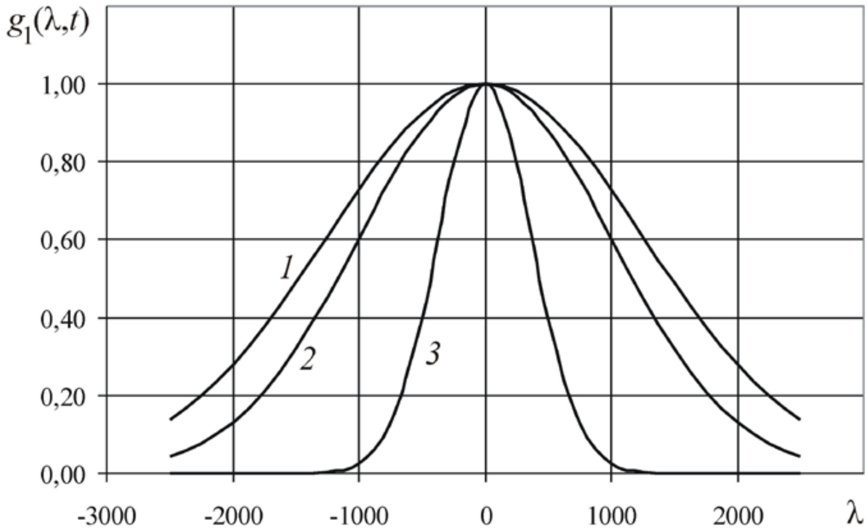

Рис. 2. График функции $g_1(\lambda;t)$ при $t=2\delta t$ (кривая 1), $t=1000\delta t$ (2), $t=10^{200}$ с (3) (поверхность с $M=0{,}1$ кг/м^2 в воде, $\alpha = 2\cdot 10^{-5}$)

Одномерная характеристическая функция позволяет найти моменты любого порядка процесса $Z(t)$. В частности, для математического ожидания и дисперсии получим

$$\left\langle Z(t)\right\rangle = \left.\frac{\partial g_1(\lambda;t)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0\,, \tag{18}$$

$$\left\langle Z^2(t)\right\rangle = -\left.\frac{\partial^2 g(\lambda;t)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \frac{1}{M^4\pi\nu}\sigma\left(\eta_1^2\ln\frac{t}{\delta t}+\frac{\eta_3^2}{8\nu^2}\left(\frac{1}{\delta t^2}-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{\eta_1\eta_3}{\nu}\left(\frac{1}{\delta t}-\frac{1}{t}\right)\right). \tag{19}$$

На рис. 3 приведен график функции, представляющей собой отношение дисперсий флуктуаций ускорения поверхности $Z(t)$ для случаев неньютоновской и ньютоновской жидкостей, т.е. функции $\left\langle Z^2(t)\right\rangle_{\text{неньют}} \Big/ \left\langle Z^2(t)\right\rangle_{\text{ньют}}$. Видно, что данное отношение дисперсий с течением времени уменьшается (особенно быстро в начале движения поверхности), стремясь при $t\to\infty$ к величине, равной единице.

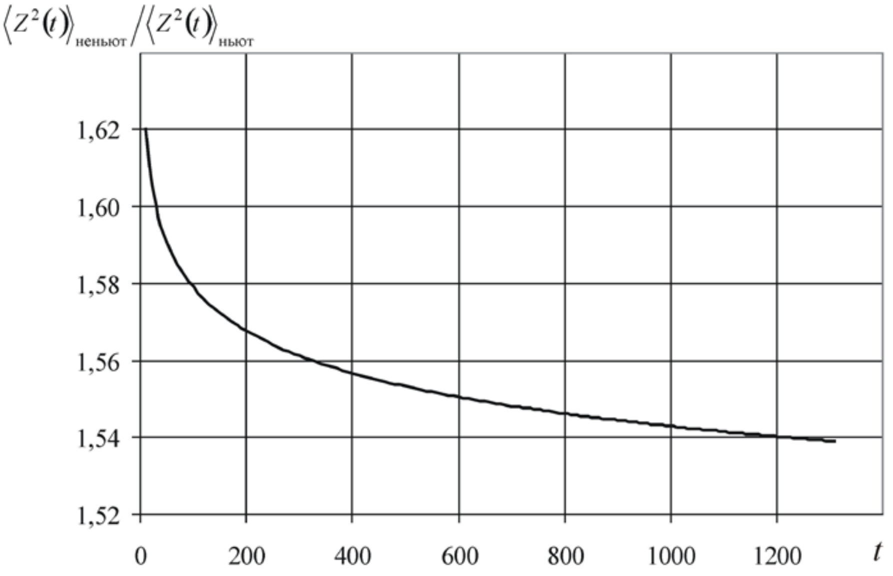

Рис. 3. График функции $\langle Z^2(t)\rangle_{\text{неньют}} \big/ \langle Z^2(t)\rangle_{\text{ньют}}$ (параметры аналогичны рис. 2)

4. Заключение

Проведенное в работе описание модели броуновского движения плоской поверхности в неньютоновской среде показало существенное отличие статистических характеристик такого процесса по сравнению с аналогичными характеристиками в случае движения поверхности в ньютоновской жидкости. Также было обнаружено, что в рамках предложенной модели влияние дилетантной и псевдопластической жидкостей на статистические характеристики процесса одинаково.

Список литературы

1. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.

2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

4. Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // Physics Letters A. 2011. Vol. 375, no. 46. P. 4113-4115. http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2011.10.001

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

6. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Применение уравнения Вольтерра второго рода для описания вязкого трения и теплопроводности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 3. С. 62-71.
7. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости : пер. с англ. М.: Мир, 1964. 216 с.
8. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.
9. Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47-56.
10. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. Новое в исследованиях 1/f-шума // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. С. 151-176.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

Brownian motion of a plane surface in a non-Newtonian medium

06, June 2013
DOI: 10.7463/0613.0586338
Morozov A.N., Skripkin A.V.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation
amor@mx.bmstu.ru
skripkin@mail.ru

This paper describes motion of a plane surface in an unbounded viscous medium with non-Newtonian properties under the action of a random force. It was shown that fluctuations in the velocity of such a surface are described by a stochastic integral equation, and are classified as non-Markov processes. Statistical characteristics of changes in surface velocity, including a characteristic function of the first order and moments of the first and the second order were obtained. It was also shown that the effect of both dilettant and pseudo-plastic non-Newtonian fluids in the first approximation have similar statistical properties. It was determined that the variance of fluctuations of surface acceleration in case of a non-Newtonian medium was greater compared to the same parameter in a Newtonian fluid.

Publications with keywords: non Newtonian fluid, non-Markov process, Brownian motion
Publications with words: non Newtonian fluid, non-Markov process, Brownian motion

References

1. Klimontovich Yu.L. *Statisticheskaya fizika* [Statistical physics]. Moscow, Nauka, 1982. 608 p.

2. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy* [Stochastic differential systems]. Moscow, Nauka, 1990. 632 p.

3. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1986. 736 p.

4. Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Physics Letters A*, 2011, vol. 375, no. 46, pp. 4113-4115. http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2011.10.001

5. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1977. 736 p.

6. Morozov A.N., Skripkin A.V. Primenenie uravneniya Vol'terra vtorogo roda dlya opisaniya vyazkogo treniya i teploprovodnosti [Application of 2nd order volterra equation for description of

viscous friction and heat conduction]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2006, no. 3, pp. 62-71.

7. Wilkinson W.L. *Non-Newtonian fluids*. New York-London, Pergamon Press, 1960. (Russ. ed.: Uilkinson U.L. *Nen'yutonovskie zhidkosti*. Moscow, Mir, 1964. 216 p.).

8. Morozov A.N. *Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie* [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 332 p.

9. Morozov A.N. Metod opisaniya nemarkovskikh protsessov, zadavaemykh lineynym integral'nym preobrazovaniem [Method of describing non-markovian processes defined by linear integral transformation]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2004, no. 3, pp. 47-56.

10. Bochkov G.N., Kuzovlev Yu.E. Novoe v issledovaniyakh 1/f-shuma [New in research of 1/f-noise]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1983, vol. 141, pp. 151-176.