УДК 538.935

Диффузионные токи в *p–n*-переходах

А. Н. Морозов, А. В. Скрипкин

Рассматривается полупроводниковый p–n-переход, через который течет флуктуирующий ток неосновных носителей. Показано, что уравнение, связывающее концентрацию дырок вблизи перехода и плотность тока, имеет вид интегрального стохастического уравнения, а изменение плотности тока, обусловленное тепловой диффузией дырок, носит характер немарковского случайного процесса. Найдены статистические характеристики таких изменений для случая модели постоянной напряженности электрического поля вблизи перехода.

PACS: 73.40.-c, 66.30.-h, 05.40.-a

Ключевые слова: *p–n*-переход, диффузия, немарковский процесс.

Введение

Процессы диффузии и теплопроводности, происходящие в физических средах, описываются, как правило, посредством использования параболического дифференциального уравнения, что позволяет провести полное аналитическое описание рассматриваемого процесса с использованием хорошо разработанной теории стохастических дифференциальных систем [1]. Случайные изменения концентрации, температуры или связанных с ними потоков будут относиться в этом случае к классу марковских процессов.

Однако описание диффузии или теплопроводности в реальных средах, обладающих той или иной степенью эредитарности, приводит к необходимости использования интегральных уравнений. Случайные процессы описываются соответствующими стохастическими интегральными операторами. В частности, это имеет место при изучении теплопроводности и диффузии у плоской поверхности [2], сферической [3] и цилиндрической [4] поверхностях, тепловом излучении проводника с флуктуирующим током [5] и др. Заметим, что и многие другие физические процессы (например, броуновское движение, учитывающее увлечение среды [6], люминесценция [7] и т. д.) приводят к стохастическим интегральным уравнениям. Так как в общем случае получаемые интегральные уравнения не сводимы к конечной системе дифференциальных, то рассматриваемые случайные изменения физических величин будут теперь немарковскими [8, 9].

В предлагаемой работе исследуется изменение плотности тока вблизи *p–n*-перехода в том случае, если на границе перехода имеет место флуктуирующий поток носителей заряда, обусловленный их тепловой диффузией. Показано, что данное изменение описывается при помощи стохастического интегрального уравнения и, следовательно, является немарковским случайным процессом.

Постановка задачи

Рассмотрим плоский *p–n*-переход полупроводникового диода, расположенный перпендикулярно оси Ox в точке $x = 0$, причем положительную ось направим в сторону области *p*-полупроводника диода, где концентрация дырок значительно превосходит концентрацию свободных электронов. Концентрацию дырок будем считать зависящей только от координаты x и времени t: $p = p(x, t)$. Дифференциальное уравнение для функции $p(x, t)$ имеет вид [10]

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \mu E(x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \gamma p(x,t) = 0, \quad x \ge 0,\ t > 0, \qquad (1)$$

где D — коэффициент диффузии дырок, μ — их подвижность, $\gamma = 1/\tau$, τ — среднее время жизни, $E(x)$ — напряженность электрического поля нескомпенсированных зарядов.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ в полупроводнике определенного

Морозов Андрей Николаевич, профессор, зав. кафедрой.
Скрипкин Алексей Владимирович, доцент.
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.
Россия, 105005, Москва, ул. 2-ая Бауманская, 5.
Тел.: 8 (499) 263-63-68, 8 (499) 263-67-35.
E-mail: amor@mx.bmstu.ru; skripkin@bmstu.ru

Статья поступила в редакцию 2 марта 2015 г.

типа преобладали соответствующие ему носители заряда. Кроме того, в значительном удалении от *p–n*-перехода для их концентрации имеют место равенства:

$$p(x, 0) = p_0\,, \tag{2}$$

$$p(\infty,\ t) = p_0\,. \tag{3}$$

где p_0 — «равновесная» концентрация.

Плотность тока дырок $j(t)$, проходящих через *p–n*-переход, выражается через концентрацию дырок $p(x, t)$ с помощью выражения работы [11]:

$$j(t) = \left. \left(-eD\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + e\mu E(x)\,p(x,t) \right) \right|_{x=0}, \tag{4}$$

где *e* — модуль заряда электрона.

Случай постоянной напряженности

Рассмотрим простейший случай, когда напряженность электрического поля постоянна: $E(x) = E = \text{const}$. Разумеется, реальные *p–n*-переходы имеют более сложный профиль функции $E(x)$, однако предлагаемая модель верна в первом приближении и способна проиллюстрировать основные особенности изучаемой задачи. Кроме того, она позволяет провести аналитическое описание рассматриваемых в задаче процессов. Решение системы (1)—(4) [12] приводит к уравнению

$$\begin{gathered} p(0,t) = \frac{1}{e}\int_0^e \left[-\frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} + \right. \\ \left. + \frac{\mu E}{2D} e^{-\gamma(t-\tau)} \text{erfc}\left(\frac{\mu E\sqrt{t-\tau}}{2\sqrt{D}} \right) \right] j(\tau)\,d\tau, \end{gathered} \tag{5}$$

где введено обозначение

$$\alpha = \frac{\mu^2 E^2}{4D} + \gamma\,, \tag{6}$$

а функция $\text{erfc}(x)$ — дополнительный интеграл ошибок.

Рассматривая в дальнейшем германиевый полупроводник (для которого μ = 0,2 м^{2}В$^{-1}$с$^{-1}$, $D = kT\mu / e = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ м^{2}с$^{-1}$, $\gamma = 10^4$ с$^{-1}$ [13]) и имея в виду, что типичные значения напряженности электрического поля *E* вблизи *p–n*-перехода $E \approx 10^6$ В/м, вместо функции $\text{erfc}(x)$ в (5) можно использовать ее асимптотическое разложение при больших значениях аргумента [14]

$$\left.\text{erfc}(x)\right|_{x\to\infty} = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right). \tag{7}$$

Подставляя последнее выражение в (5), получим

$$p(0,t) = \frac{2\sqrt{D}}{e\mu^2 E^2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}}\, j(\tau)\,d\tau\,. \tag{8}$$

Пусть ток, текущий через *p-n*-переход, обусловлен тепловой диффузией носителей заряда в полупроводнике (ток, созданный внешними источниками, не учитываем). Функцию $p(0,\,t)$ будем считать белым шумом с интенсивностью ν, которую можно оценить по формуле, следующей из соотношения Найквиста [15]

$$\nu = \frac{4kT}{e^2 v_0^2 R S^2} = \frac{4m^*}{e^2 \rho V}\,, \tag{9}$$

где *R* и ρ — сопротивление и удельное сопротивление полупроводника, *S* и *V* — площадь поперечного сечения перехода и его эффективный объем, v_0 и m^* — средняя тепловая скорость и эффективная масса дырок. При этом для германия будем полагать $\rho = 0{,}1$ Ом·м, $m^* = 0{,}4 m_e$, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, а также $V = 10^{-8}$ м^3.

Так как полученное стохастическое интегральное уравнение (8) не сводимо к конечной системе дифференциальных уравнений, то, как было отмечено ранее, процесс $j(t)$ при наличии марковских тепловых флуктуаций концентрации носителей заряда будет относиться уже к классу немарковских процессов.

Преобразование Лапласа выражения (8) дает для образов функций зависимость вида [16]:

$$\begin{gathered} \tilde{p}(0,s) = \frac{4\sqrt{D}}{e\mu^2 E^2\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{\delta t}} + \sqrt{\delta t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)(s+\alpha) - \sqrt{\pi(s+\alpha)} \right) \tilde{j}(s), \end{gathered} \tag{10}$$

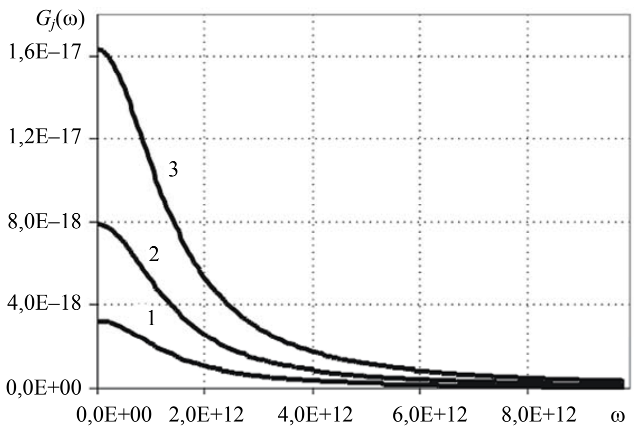
где *s* — параметр преобразования, δt — малый параметр, сопоставимый с временем хаотизации среды (в первом приближении можно считать, что $\delta t = \gamma^{-1}$). Для спектральной плотности мощности флуктуаций $G_j(\omega) = \left|\tilde{j}(i\omega)\right|^2$ тока частиц тогда получим следующее выражение:

$$G_j(\omega) = \frac{\pi e^2 \mu^4 E^4 \nu}{64D} \times$$
$$\times \frac{1}{C + \delta t\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1\right)^2 \omega^2 + \pi\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}, \quad (11)$$

где введено обозначение

$$C = \frac{1}{\delta t} + 2\alpha\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1\right) + \alpha^2 \delta t\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1\right)^2 -$$
$$-2\sqrt{\frac{\pi\alpha}{\delta t}} - 8\sqrt{\pi\alpha^3 \delta t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1\right). \quad (12)$$

Из формулы (11) следует, что при малых ω, при которых $\omega << \alpha$, спектральная плотность $G_j(\omega)$ имеет характер, аналогичный спектральной плотности импульса классической броуновской частицы. При больших ω, когда первым и третьим слагаемыми в знаменателе (11) можно пренебречь по сравнению со вторым, спектральная плотность $G_j(\omega)$ асимптотически уменьшается до нуля как коричневый шум. При средних значениях ω ($\omega \approx \alpha$) спектральная плотность носит более сложный характер. На рисунке изображен график зависимости для параметров полупроводника, указанных выше, и различных значениях напряженности поля E.



Графики зависимости спектральной плотности мощности флуктуаций тока для параметров полупроводника, указанных выше; кривая 1 получена при E = 0,8 МВ/м, 2 при E = 1 МВ/м, 3 при E = 1,2 МВ/м

Заключение

Рассмотренная в работе простейшая модель диффузионного переноса заряда вблизи *p–n*-перехода и связанного с ним флуктуирующего тока показывает, что даже марковское внешнее воздействие на полупроводниковые среды приводит к их немарковскому отклику. Заметим, что такая ситуация является типичной. В частности, всегда имеющие место флуктуации проводимости полупроводников приводят к еще одному немарковскому процессу — флуктуациям тока в низкочастотной области спектра, имеющим характер фликкер-шума [17]. Сказанное позволяет сделать вывод о том, что описание процессов в таких средах с использованием более простой марковской модели может рассматриваться лишь как первое приближение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. — М.: Наука, 1990.

2. *Морозов А. Н., Скрипкин А. В.* // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2006. № 3. С. 62.

3. *Морозов А. Н., Скрипкин А. В.* // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53. № 11. С. 55.

4. *Морозов А. Н., Скрипкин А. В.* // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 6. С. 1121.

5. *Морозов А. Н., Скрипкин А. В.* // Прикладная физика. 2013. № 4. С. 43.

6. *Morozov A. N., Skripkin A. V.* // Physics Letters A. 2011. V. 375. P. 4113.

7. *Морозов А. Н., Скрипкин А. В.* // Нелинейный мир. 2010. Т. 8. № 9. С. 545.

8. *Морозов А. Н.* Необратимые процессы и броуновское движение. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997.

9. *Морозов А. Н.* // Вестник МГТУ. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47.

10. *Епифанов Г. И., Мома Ю. А.* Твердотельная электроника. — М.: Высшая школа, 1986.

11. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников. — М.: Наука, 1977.

12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

13. *Лебедев А. И.* Физика полупроводниковых приборов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

14. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984.

15. *Букингем М.* Шумы в электронных приборах и системах: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986.

16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. — М.: Наука, 1969.

17. *Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е.* // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. С. 151.

Diffusion current flow through the p-n-junction

A. N. Morozov and A. V. Skripkin

Bauman Moscow State Technical University
5 2-nd Baumanskaya str., 105005, Moscow, Russia
E-mail: skripkin@bmstu.ru

Received March 2, 2015

We consider a semiconductor p-n-junction, which flows through the fluctuating current of minority carriers. It is shown that the equation relating the concentration of holes near the junction and the current density is given by the integral stochastic equation, and the change in current density due to the thermal diffusion of the holes is in the nature of non-Markovian stochastic process. Statistical characteristics of such changes for the case of a constant model of the electric field near the junction are found.

PACS: 73.40.-c, 66.30.-h, 05.40.-a

Keywords: *p–n*-junction, diffusion, non-Markovian process.

REFERENCES

1. V. S. Pugachev and I. N. Sinitsin, *Stochastic Differential Systems* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
2. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Vestn. MGTU. Ser. Estestv, Nauki, No. 3, 62 (2006).
3. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Izv. Vuzov. Fizika **53** (11), 55 (2010).
4. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal **84,** 1121 (2011).
5. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Prikladnaya Fizika, No. 4, 43 (2013).
6. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Physics Letters A. **375,** 4113 (2011).
7. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Nelineinyi Mir **8,** 545 (2010).
8. A. N. Morozov, *Irreversible Processes and Brownian Motion* (Bauman MGTU, Moscow, 1997) [in Russian].
9. A. N. Morozov, Vestn. MGTU. Ser. Estestv, Nauki, No. 3, 47 (2004).
10. G. I. Epifanov and Yu. A. Moma, Solid Electronics (Vyssh. Shkola, Moscow, 1986) [in Russian].
11. V. L. Bonch-Bruevich and S. G. Kalashnikov, *Physics of Semiconductors* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
12. A. N. Tikhonov and A. A. Samarsky, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian.
13. A. I. Lebedev, *Physics of Semiconductor Devices* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
14. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
15. M. J. Buckingham, *Noise in Electronic Devices and Systems* (E. Horwood ; New York : Halsted Press, 1983; Mir, Moscow, 1986).
16. H. Bateman and A. Erdelyi, *Tables of Integral Transforms. Vol. 1* (New York, McGraw-Hill, 1954; Nauka, Moscow, 1969).
17. G. N. Bochkov and Yu. E. Kuzovlev, Phys. Usp. **141,** 151 (1983).