Применение линейных интегральных преобразований для описания немарковских случайных процессов

Морозов А.Н. (amor@mx.bmstu.ru), Скрипкин А.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, кафедра физики

При описании броуновского движения, а также многих других случайных процессов, происходящих в физических и технических системах, пользуются обычно моделью марковского случайного процесса [1]. В этой модели предполагается, что протекание случайного процесса в будущем зависит только от состояния в настоящий момент и не зависит от эволюции процесса в прошлом. Другими словами, протекание процесса характеризуется отсутствием у него памяти. Описывающие такой процесс уравнения являются дифференциальными уравнениями. Однако марковская модель является приближенной [2, 3]. Например, учет увлечения броуновской частицей окружающих ее частиц среды приводит к необходимости знания импульса частицы не только в некоторый начальный момент времени, но и для моментов времени, предшествующих начальному [4]. Процесс движения броуновской частицы в вязкой среде становится процессом с памятью, что ведет к существенной погрешности в случае применения для флуктуаций импульса броуновской частицы модели марковского случайного процесса.

Отклик реальных физических и технических систем на внешнее случайное воздействие является немарковским процессом. При этом само воздействие может носить и марковский характер. Указанный эффект возрастает с ростом сложности системы. В частности, отклик биологических и социальных систем на случайное воздействие является принципиально немарковским процессом.

Другими примерами немарковских процессов являются реальные радиотехнические сигналы при их амплитудной и фазовой модуляции совокупностью детерминированных и случайных процессов [5]; фликкер-шум [6], встречающийся в системах различной природы (например, флуктуации кинетических коэффициентов или шум электронных приборов [7]) и др.

Таким образом, использование модели марковского случайного процесса во многих случаях является слишком грубым, а в некоторых случаях – принципиально неприменимым. В связи с этим актуальным становится разработка математических методов описания немарковских случайных процессов. Одной из возможностей математического представления немарковского процесса является использование интегральных операторов взамен дифференциальных. Такой подход принципиально позволяет учесть память системы при протекании в ней случайного процесса.

В данной работе проведено описание марковского процесса с использованием стохастических дифференциальных уравнений, затем сделано описание немарковского процесса, который задан с помощью линейного интегрального преобразования. Наконец, в качестве примера показано, как с помощью интегрального преобразования с ядром абелева типа возможно описание характерного типа немарковских процессов – фликкер-шума.

Стохастические дифференциальные уравнения. Теория стохастических дифференциальных систем дает возможность определять необходимые статистические характеристики случайного процесса $Z(t)$ в том случае, когда этот процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dZ = a(Z,t)dt + b(Z,t)dW(t), \tag{1}$$

где $W(t)$ – процесс с независимыми приращениями. Процесс $Z(t)$ в этом случае является марковским процессом, статистические характеристики которого можно определить путем решения дифференциального уравнения для L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)$ [8].

Но существуют процессы, которые невозможно описать с помощью дифференциального уравнения (1). В частности, если случайный процесс $Z(t)$, описывается с помощью линейного интегрального преобразования

$$Z(t) = \int_0^t G(t,\tau)dW(\tau), \tag{2}$$

где $G(t,\tau)$ – непрерывная функция переменной τ, то этот процесс может не являться марковским процессом. Здесь считается, что интеграл (2) представляет собой интеграл Ито [8 – 10]. Частный случай использования преобразования вида (2) для описания дробового эффекта исследован в работе [8].

Из выражения (2) следует, что начальное условие для процесса $Z(t)$ имеет вид

$$Z(t)\big|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

а, следовательно, его одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda;t)$ принимает начальное условие [8]

$$g_1(\lambda;t)\big|_{t=0} = 1. \tag{4}$$

Если интегральное преобразование (2) имеет ядро $G(t,\tau)$, допускающее сведение уравнения (2) к конечномерной системе уравнений типа (1), то задача нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$ может быть решена стандартными методами теории стохастических дифференциальных систем [8 – 10]. Но в общем случае такое преобразование оказывается невозможным, что приводит к необходимости разработки адекватной методики нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$, описываемого уравнением (2).

Если ядро интегрального преобразования (2) имеет вид

$$G(t,\tau)=\exp\left(-\alpha\left(t-\tau\right)\right), \tag{5}$$

то уравнение (2) позволяет записать уравнение Ито

$$dZ=-\alpha Zdt+dW\left(t\right) \tag{6}$$

с начальным условием (3).

В случае, если одномерная характеристическая функция процесса с независимыми приращениями $W(t)$ имеет вид $h_1(\lambda;t)$, то уравнение для L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)$ процесса $Z(t)$, описываемого уравнением (6), можно записать в форме [8]

$$\frac{\partial g_L}{\partial t}=-\alpha\lambda\frac{\partial g_L}{\partial\lambda_L}+\chi\left(\lambda_L;t_L\right)g_L, \tag{7}$$

где

$$\chi\left(\lambda_L;t_L\right)=\frac{\partial}{\partial t_L}\ln h_1\left(\lambda_L;t_L\right),\ L=1,2,... \tag{8}$$

Начальное условие для уравнения (7) имеет вид

$$g_L\left(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_{L-1},t_L\right)\Big|_{t_L=t_{L-1}}=g_{L-1}\left(\lambda_1,...,\lambda_{L-2},\lambda_{L-1}+\lambda_L;t_1,...,t_{L-1}\right). \tag{9}$$

Решение уравнения (7) с учетом начального условия (4) дает выражение для L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)$:

$$g_L\left(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L\right)=\exp\left[\sum_{l=1}^{L}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\chi\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k\exp\left(-\alpha\left(t_k-\tau\right)\right);\tau\right)d\tau\right]. \tag{10}$$

Если процесс $W(t)$ является винеровским процессом с интенсивностью ν и описывается одномерной характеристической функцией

$$h_1\left(\lambda;t\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\nu\lambda^2t\right), \tag{11}$$

то в соответствии с формулами (8) и (10) имеем

$$g_L\left(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L\right)=\exp\left[-\frac{\nu}{2\alpha}\sum_{l,k=1}^{L}\left(\lambda_l\lambda_k\left(\exp\left(-\alpha\left|t_l-t_k\right|\right)-\exp\left(-\alpha\left(t_l+t_k\right)\right)\right)\right)\right]. \tag{12}$$

Для случая, когда процесс $W(t)$ представляет собой пуассоновский процесс с интенсивностью потока скачков ν и характеристической функцией скачков $g(\lambda)$, то с учетом его одномерной характеристической функции

$$h_1\left(\lambda;t\right)=\exp\left(\left(g\left(\lambda\right)-1\right)\nu t\right) \tag{13}$$

получим

$$g_L\left(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L\right)=\exp\left[\nu\sum_{l=1}^{L}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\left(g\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k\exp\left(-\alpha\left(t_k-\tau\right)\right)\right)-1\right)d\tau\right]. \quad (14)$$

Отметим, что процессы, описываемые L-мерными характеристическими функциями (12) и (14) являются марковскими случайными процессами и удовлетворяют условию (9).

Описание немарковского процесса, задаваемого линейным интегральным преобразованием. Рассмотрим общий метод нахождения L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)$ процесса $Z(t)$, описываемого линейным интегральным преобразованием (2) [11].

Начнем с построения одномерной характеристической функции. Будем считать, что преобразование (2) представляет собой интеграл Ито [8 – 10]. Разобьем интервал $(0,\, t)$ на N равных интервалов, продолжительностью $\Delta t = t/N$. Моменты времени t_n, соответствующие окончаниям интервалов, удовлетворяют условию: $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = t$. Тогда интеграл Ито в (2) можно заменить средним квадратическим пределом

$$Z\left(t\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}G\left(t,t_n\right)\Delta W\left(t_n\right), \quad (15)$$

где $\Delta W(t_n)=W(t_{n+1})-W(t_n)$ – независимые приращения процесса $W(t_n)$.

Одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda;t)$ процесса $Z(t)$ выражается формулой

$$g_1\left(\lambda;t\right)=\left\langle\exp\left(i\lambda Z\left(t\right)\right)\right\rangle, \quad (16)$$

где операция $\langle ... \rangle$ представляет собой нахождение математического ожидания. Подставляя в формулу (16) выражение (15) имеем

$$g_1(\lambda;t)=\left\langle\exp\left(i\lambda\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}G(t,t_n)\Delta W(t_n)\right)\right\rangle=\left\langle\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\exp(i\lambda G(t,t_n)\Delta W(t_n))\right\rangle. \quad (17)$$

Так как приращения $\Delta W(t_n)$ являются независимыми, то последнее выражение в (17) приобретает вид

$$g_1(\lambda;t)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\left\langle\exp(i\lambda G(t,t_n)\Delta W(t_n))\right\rangle. \quad (18)$$

Логарифмирование выражения (18) дает

$$\ln g_1(\lambda;t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\ln h(\lambda;t;t_n), \quad (19)$$

где введено обозначение

$$h(\lambda;t;t_n)=\left\langle\exp(i\lambda G(t,t_n)\Delta W(t_n))\right\rangle. \quad (20)$$

Учитывая то, что для процесса с независимыми приращениями характеристическая функция приращений записывается через его одномерную характеристическую функцию, имеем

$$h(\lambda;t;t_n) = \langle \exp(i\lambda G(t,t_n)\Delta W(t_n))\rangle = \frac{\langle \exp(i\lambda G(t,t_n)W(t_{n+1}))\rangle}{\langle \exp(i\lambda G(t,t_n)W(t_n))\rangle}. \qquad (21)$$

Тогда

$$\ln h(\lambda;t;t_n) = \ln\langle \exp(i\lambda G(t,t_n)W(t_{n+1}))\rangle - \ln\langle \exp(i\lambda G(t,t_n)W(t_n))\rangle. \quad (22)$$

Подстановка выражения (22) в формулу (18) дает

$$\ln g_1(\lambda;t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\ln\langle \exp(i\lambda G(t,t_n)W(t_{n+1}))\rangle - \ln\langle \exp(i\lambda G(t,t_n)W(t_n))\rangle}{\Delta t}\Delta t. \quad (23)$$

После замены в формуле (23) суммирования интегралом Ито и последующего потенцирования получившегося выражения получим

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[\int_0^t \chi(\lambda G(t,\tau);\tau)d\tau\right], \qquad (24)$$

где

$$\chi(\lambda G(t,\tau);\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\ln h_1(\lambda G(t,\tau);\tau), \qquad (25)$$

$$h_1(\lambda G(t,\tau);\tau) = \langle \exp(i\lambda G(t,\tau)W(\tau))\rangle. \qquad (26)$$

Для случая, если процесс $W(t)$ является винеровским (см. формулу (11)) имеем

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\nu\lambda^2\int_0^t G^2(t,\tau)d\tau\right], \qquad (27)$$

а если – пуассоновским (см. формулу (13)), то

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[\nu\int_0^t (g(\lambda G(t,\tau))-1)d\tau\right]. \qquad (28)$$

Теперь перейдем к построению L-мерной характеристической функции. Для нахождения L-мерной характеристической функции запишем интегральное преобразование (2) для произвольных моментов времени t_l, причем для определенности будем считать, что $t_{l+1} > t_l$:

$$Z(t_l) = \int_0^{t_l} G(t_l,\tau)dW(\tau), \qquad (29)$$

где $l = 1,2,...,L$. Учитывая то, что выражение (29) представляет собой интеграл Ито, заменим его средним квадратическим пределом

$$Z(t_l) = \lim_{N_l\to\infty}\sum_{n=0}^{N_l-1} G(t_l,t_n)\Delta W(t_n). \qquad (30)$$

Здесь N_l – число разбиений интервала (0, t_l).

По определению L-мерная характеристическая функция $g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)$ выражается формулой

$$g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L) = \left\langle \exp\left(i\sum_{l=1}^{L} \lambda_l Z(t_l) \right) \right\rangle. \quad (31)$$

Подстановка выражения (30) в формулу (31) дает

$$\begin{aligned} g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L) &= \left\langle \exp\left(i\sum_{l=1}^{L} \lambda_l \lim_{N_l\to\infty} \sum_{n=0}^{N_l-1} G(t_l,t_n)\Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \exp\left(i \lim_{N_L\to\infty} \sum_{n=0}^{N_L-1} \left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

При получении последнего выражения в формуле (32) введено условие

$$G(t_l,t_n)\big|_{t_n>t_l} = 0. \quad (33)$$

Выполнение преобразований, аналогичных (17) и (18), дает

$$\begin{aligned} g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L) &= \left\langle \lim_{N_L\to\infty} \prod_{n=0}^{N_L-1} \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \\ &= \lim_{N_L\to\infty} \prod_{n=0}^{N_L-1} \left\langle \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

После логарифмирования выражения (34) имеем

$$\ln g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L) = \lim_{N_L\to\infty} \sum_{n=0}^{N_L-1} \ln h(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L;t_n), \quad (35)$$

где введено обозначение

$$h(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L;t_n) = \left\langle \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \quad (36)$$

Далее выполняя операции, аналогичные (21) – (26), имеем

$$g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L) = \exp\left[\int_0^{t_L} \chi\left(\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,\tau) \right); \tau \right) d\tau \right], \quad (37)$$

где

$$\chi\left(\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,\tau) \right); \tau \right) = \frac{\partial}{\partial\tau} \ln h_1\left(\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,\tau) \right); \tau \right), \quad (38)$$

$$h_1\left(\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,\tau) \right); \tau \right) = \left\langle \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l G(t_l,\tau) \right) W(\tau) \right) \right\rangle. \quad (39)$$

При нахождении интеграла в выражении (37) необходимо учитывать условие (33):

$$G(t_l,\tau)\big|_{\tau>t_l} = 0. \quad (40)$$

Формулы (24) – (26) являются частными случаями выражений (37) – (39) при $L=1$.

В том случае, если процесс $W(t)$ является винеровским, то

$$g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)=\exp\left[-\frac{1}{2}\nu\sum_{l,k=1}^{L}\lambda_l\lambda_k\int_0^{\min(t_l,t_k)}G(t_l,\tau)G(t_k,\tau)d\tau\right], \qquad (41)$$

а если пуассоновским, то

$$g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)=\exp\left[\nu\int_0^t\left(g\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l G(t_l,\tau)\right)-1\right)d\tau\right]. \qquad (42)$$

Для случая, когда ядро преобразования (2) имеет вид (5) формулы (37), (41) и (42) совпадают соответственно с выражениями (10), (12) и (14), полученными с помощью теории стохастических дифференциальных систем. В общем случае, когда интегральное преобразование (2) не сводится к конечномерной системе дифференциальных уравнений, то формулы (37), (41) и (42) описывают немарковский случайный процесс. На это, в частности, указывает то, что для выражения (42) в общем случае не выполняется условие (9).

Пример описания немарковского процесса. Рассмотрим в качестве примера описание фликкер-шума. Пусть ядро преобразования (2) имеет вид

$$G(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad (43)$$

а процесс $W(t)$ является винеровским. Тогда на основании формулы (27) при переходе от расходящегося интеграла к аппроксимирующей его конечной величине для одномерной характеристической функции имеем:

$$g_1(\lambda;t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\nu\lambda^2\ln\frac{t}{\delta t}\right), \qquad (44)$$

где $\delta t>0$ – малая величина. Для L-мерной характеристической функции применение формулы (41) позволяет получить:

$$g_L(\lambda_1,...,\lambda_L;t_1,...,t_L)=$$

$$=\exp\left[-\frac{1}{2}\nu\left(\sum_{l=1}^{L}\left(\lambda_l^2\ln\frac{t}{\delta t}\right)+4\sum_{\substack{l,k=1\\ l>k}}^{L}\left(\lambda_l\lambda_k\ln\frac{\sqrt{t_l}+\sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l-t_k+\delta t}+\sqrt{\delta t}}\right)\right)\right]. \qquad (45)$$

Формулы (44) и (45) дают возможность определить математическое ожидание и момент второго порядка случайного процесса $Z(t)$:

$$\langle Z(t)\rangle=\left.\frac{\partial g_1}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=0, \qquad (46)$$

$$\langle Z(t_1)Z(t_2)\rangle=\left.\frac{\partial^2 g_2}{i\partial\lambda_1 i\partial\lambda_2}\right|_{\lambda_1,\lambda_2=0}=2\nu\ln\left(\frac{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2-t_1+\delta t}+\sqrt{\delta t}}\right). \qquad (47)$$

Здесь $t_2 > t_1$. При $t_2 = t_1 = t$ формула (47) приобретает вид:

$$\left\langle Z^2(t)\right\rangle = \nu \ln\left(\frac{t}{\delta t}\right). \tag{48}$$

Момент второго порядка (47) позволяет определить одностороннюю спектральную плотность случайного процесса $Z(t)$:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \lim_{\delta t\to 0}\left\{4\int_0^{t-\delta t}\left\langle Z(t-\tau)Z(t)\right\rangle \cos\omega\tau d\tau\right\} = \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\left\{8\nu\int_0^{t-\delta t}\ln\left(\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\tau+\delta t}+\sqrt{\delta t}}\right)\cos\omega\tau d\tau\right\} \end{aligned}. \tag{49}$$

Интегрирование выражения (49) дает [12]:

$$G(\omega) = (-i)\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[t^{\varepsilon}\frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\varepsilon+1/2)}\left({}_1F_1(\varepsilon;\varepsilon+1/2;i\omega t) - {}_1F_1(\varepsilon;\varepsilon+1/2;-i\omega t)\right)\right], \tag{50}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция, ${}_1F_1(a;b;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

В том случае, если $\omega t >> 1$ вырожденные гипергеометрические функции в выражении (50) могут быть разложены в ряд по степеням выражения $1/\sqrt{\omega t}$. Тогда при сохранении только первого члена разложения имеем [13]

$$\begin{aligned} &G(\omega)\big|_{t\to\infty} = \\ &= (-i)\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[t^{\varepsilon}\frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\varepsilon+1/2)}\left(\frac{\Gamma(\varepsilon+1/2)}{\Gamma(1/2)}\left((-i\omega t)^{-\varepsilon} - (i\omega t)^{-\varepsilon}\right)\left(1+O\left(1/\sqrt{\omega t}\right)\right)\right)\right] = \\ &= (-i)\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[t^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\varepsilon\left(\ln(-i\omega t) - \ln(i\omega t)\right)\right] = \\ &= (-i)\frac{2\nu}{\omega}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[t^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon+1)\left((-i)\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2\pi\nu}{\omega}. \end{aligned} \tag{51}$$

Таким образом, случайный процесс, описываемый L-мерной характеристической функцией (45), имеет спектральную плотность

$$G(\omega)\big|_{t\to\infty} = \frac{2\pi\nu}{\omega}, \tag{52}$$

которая возрастает обратно-пропорционально частоте при её уменьшении. Это указывает на то, что этот процесс является фликкер-шумом [6].

Полученная L-мерная характеристическая функция (45) может найти применение для адекватного описания броуновского движения, так как флуктуации коэффициента диффузии броуновской частицы имеют характер фликкер-шума [2].

Заключение. Рассмотренный метод описания немарковских случайных процессов с помощью линейных интегральных преобразований может использоваться при рассмотрении процессов, происходящих в вязких и реологических средах, радиотехнических системах, а также в других случаях, когда применение модели марковского процесса приводит к неточному или неадекватному описанию процессов, происходящих в таких системах.

Использование рассмотренного метода описания немарковских процессов может привести к обнаружению новых физических эффектов, не проявляющихся при использовании марковской модели.

Литература

1. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
2. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 332 с.
3. Морозов А.Н. Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения. – ЖЭТФ. – 1996. – Том. 109, вып. 4. – С. 1304 – 1315.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
5. Голяницкий И.А. Оптимальная пространственно-временная обработка негауссовых полей и процессов. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 208 с.
6. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. Новое в исследованиях 1/f-шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, вып. 1. – С. 151 – 176.
7. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 399 с.
8. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
9. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
10. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1987. – 400 с.
11. Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ, Естественные науки. 2004. №3. – С. 47 – 56.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.:Наука, 1981. – 800 с.
13. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.:Наука, 1984. – 344 с.