

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ КАК НЕМАРКОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

А.Н. Морозов, А.В. Скрипкин

Введение. Применение теории марковских процессов при описании броуновского движения в реальных физических средах является приближенным, не учитывающим особенности взаимодействия броуновской частицы и частиц среды [1, 2]. Отметим, что и процессы, происходящие в физических и технических системах, зачастую также не подпадают под разряд марковских процессов [3 – 5].

Примером немарковского процесса может служить фликкер-шум, наблюдаемый в процессах, имеющих различную физическую природу [6]. В частности, экспериментально наблюдаемые флуктуации кинетических коэффициентов (например, флуктуации коэффициента электропроводности) имеют спектральную плотность, характерную для фликкер-шума. Фликкер-шум является основным типом шума, ограничивающего чувствительность электронных приборов в низкочастотной части спектра [7].

К классу немарковских процессов относятся реальные радиотехнические сигналы при их амплитудной и фазовой модуляции совокупностью детерминированных и случайных процессов [5]. Приращения для таких сигналов имеют негауссовое распределение вероятности, не коррелированы и статистически зависимы.

Отметим также, что при воздействии марковского случайного процесса на динамическую систему её отклик представляет собой немарковский случайный процесс. Сумма двух марковских процессов представляет собой немарковский процесс. Немарковскими будут также процессы, образованные при интегрировании марковского или нахождении скользящего среднего от процесса с независимыми значениями [4]. В частности, координата броуновской частицы, вычисляемая как интеграл от её скорости, в

общем случае не описывается моделью марковского случайного процесса. Винеровское приближение для броуновской частицы справедливо только на достаточно больших промежутках времени, существенно больших времени релаксации частицы.

Любая фильтрация (как линейная, так и нелинейная) приводит к преобразованию марковского процесса в немарковский. Результатом большинства динамических измерений выступает немарковский процесс, так как в таких измерительных системах всегда осуществляется фильтрация входного воздействия.

Указанные соображения показывают, что при описании и анализе реальных физических процессов и технических устройств практически всегда приходится иметь дело с немарковскими случайными процессами, а модель марковского процесса может рассматриваться только как первое приближение.

Броуновское движение как марковский процесс. При описании броуновского движения обычно используется подход, основанный на применении стохастического уравнения Ланжевена [1, 8]. Указанный подход позволяет воспользоваться хорошо разработанной теорией стохастических дифференциальных систем [9, 10], с помощью которой можно определять все необходимые статистические характеристики флуктуаций скорости движения броуновской частицы.

Рассмотрим движение шарообразной броуновской частицы радиуса R и массы M в среде (жидкости или газе) с кинематической вязкостью ν и плотностью ρ . Уравнение движения такой частицы имеет вид:

$$M \frac{dV(t)}{dt} = F(t) + \xi_V(t), \quad (1)$$

где $V(t)$ – скорость частицы, $F(t)$ – внешняя сила, действующая на частицу, $\xi_V(t)$ – случайная сила. При этом запишем:

$$F(t) = F_0(t) + F_c(t), \quad (2)$$

где $F_c(t)$ – сила сопротивления, $F_0(t)$ – сумма остальных внешних заданных сил. Уравнение (1) с учетом (2) примет вид:

$$M \frac{dV(t)}{dt} = F_0(t) + F_c(t) + \xi_V(t). \quad (3)$$

Силу сопротивления $F_c(t) = F_{c0}(t)$ для линейной вязкой среды обычно записывают в виде

$$F_{c0}(t) = -\gamma V(t), \quad (4)$$

где γ – коэффициент вязкого трения, который для шарообразной частицы равен $\gamma = 6\pi\eta R$. Считая спектральную плотность случайного процесса $\xi_V(t)$ равной

$$G_M = 2\gamma MkT, \quad (5)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура вязкой жидкости, в которой находится броуновская частица, спектральную плотность флуктуаций скорости $V(t)$ запишем как [8]

$$G_V(\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (6)$$

где $\alpha = 2\gamma kT/M$, $\beta = \gamma/M$. Для низких частот спектральная плотность $G_V(\omega)$ стремится к постоянной величине:

$$G_V(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2MkT}{\gamma}. \quad (7)$$

Если случайный процесс $\xi_V(t)$ представляет собой производную от процесса с независимыми приращениями, то скорость $V(t)$ броуновской частицы описывается марковским случайным процессом, что позволяет определить для неё любые L -мерные характеристические функции, а, следовательно, и любые многомерные функции распределения [9].

Отметим, что описанный подход может быть использован и при решении задачи определения флуктуаций температуры тела, находящегося в

тепловом контакте с термостатом, если тепловой поток от него пропорционален разности температур тела и термостата.

Стохастические дифференциальные уравнения. Теория стохастических дифференциальных систем дает возможность определять необходимые статистические характеристики случайного процесса $Z(t)$ в том случае, когда этот процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dZ = a(Z, t)dt + b(Z, t)dW(t), \quad (8)$$

где $W(t)$ – процесс с независимыми приращениями. Процесс $Z(t)$ в этом случае является марковским процессом, статистические характеристики которого можно определить путем решения дифференциального уравнения для L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ [9].

Но существуют процессы, которые невозможно описать с помощью дифференциального уравнения (8). В частности, если случайный процесс $Z(t)$, описывается с помощью линейного интегрального преобразования

$$Z(t) = \int_0^t G(t, \tau)dW(\tau), \quad (9)$$

где $G(t, \tau)$ – непрерывная функция переменной τ , то этот процесс может не являться марковским процессом. Здесь считается, что интеграл (9) представляет собой интеграл Ито [9 – 11]. Частный случай использования преобразования вида (9) для описания дробового эффекта исследован в работе [9].

Из выражения (9) следует, что начальное условие для процесса $Z(t)$ имеет вид

$$Z(t)|_{t=0} = 0, \quad (10)$$

а, следовательно, его одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ принимает начальное условие [9]

$$g_1(\lambda; t)|_{t=0} = 1. \quad (11)$$

Если интегральное преобразование (9) имеет ядро $G(t, \tau)$, допускающее сведение уравнения (9) к конечномерной системе уравнений типа (8), то задача нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$ может быть решена стандартными методами теории стохастических дифференциальных систем [9 – 11]. Но в общем случае такое преобразование оказывается невозможным, что приводит к необходимости разработки адекватной методики нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$, описываемого уравнением (9).

Если ядро интегрального преобразования (9) имеет вид

$$G(t, \tau) = \exp(-\alpha(t - \tau)), \quad (12)$$

то уравнение (9) позволяет записать уравнение Ито

$$dZ = -\alpha Z dt + dW(t) \quad (13)$$

с начальным условием (10).

В случае, если одномерная характеристическая функция процесса с независимыми приращениями $W(t)$ имеет вид $h_1(\lambda; t)$, то уравнение для L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ процесса $Z(t)$, описываемого уравнением (13), можно записать в форме [9]

$$\frac{\partial g_L}{\partial t} = -\alpha \lambda \frac{\partial g_L}{\partial \lambda_L} + \chi(\lambda_L; t_L) g_L, \quad (14)$$

где

$$\chi(\lambda_L; t_L) = \frac{\partial}{\partial t_L} \ln h_1(\lambda_L; t_L), \quad L = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Начальное условие для уравнения (14) имеет вид

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_{L-1}, t_L) \Big|_{t_L=t_{L-1}} = g_{L-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{L-2}, \lambda_{L-1} + \lambda_L; t_1, \dots, t_{L-1}). \quad (16)$$

Решение уравнения (14) с учетом начального условия (11) дает выражение для L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$:

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \chi \left(\sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)); \tau \right) d\tau \right]. \quad (17)$$

Если процесс $W(t)$ является винеровским процессом с интенсивностью ν и описывается одномерной характеристической функцией

$$h_1(\lambda; t) = \exp \left(-\frac{1}{2} \nu \lambda^2 t \right), \quad (18)$$

то в соответствии с формулами (15) и (17) имеем

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{\nu}{2\alpha} \sum_{l,k=1}^L \left(\lambda_l \lambda_k \left(\exp(-\alpha|t_l - t_k|) - \exp(-\alpha(t_l + t_k)) \right) \right) \right] \quad (19)$$

Для случая, когда процесс $W(t)$ представляет собой пуассоновский процесс с интенсивностью потока скачков ν и характеристической функцией скачков $g(\lambda)$, то с учетом его одномерной характеристической функции

$$h_1(\lambda; t) = \exp \left((g(\lambda) - 1) \nu t \right) \quad (20)$$

получим

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\nu \sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left(g \left(\sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)) \right) - 1 \right) d\tau \right]. \quad (21)$$

Отметим, что процессы, описываемые L -мерными характеристическими функциями (19) и (21) являются марковскими случайными процессами и удовлетворяют условию (16).

Описание немарковского процесса, задаваемого линейным интегральным преобразованием. Рассмотрим общий метод нахождения L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ процесса $Z(t)$, описываемого линейным интегральным преобразованием (9) [12].

Начнем с построения одномерной характеристической функции. Будем считать, что преобразование (9) представляет собой интеграл Ито [9 – 11]. Разобьем интервал $(0, t)$ на N равных интервалов, продолжительно-

стью $\Delta t = t/N$. Моменты времени t_n , соответствующие окончаниям интервалов, удовлетворяют условию: $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t$. Тогда интеграл Ито в (9) можно заменить средним квадратическим пределом

$$Z(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} G(t, t_n) \Delta W(t_n), \quad (22)$$

где $\Delta W(t_n) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ – независимые приращения процесса $W(t_n)$.

Одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ процесса $Z(t)$ выражается формулой:

$$g_1(\lambda; t) = \left\langle \exp(i\lambda Z(t)) \right\rangle, \quad (23)$$

где операция $\langle \dots \rangle$ представляет собой нахождение математического ожидания. Подставляя в формулу (23) выражение (22) имеем

$$g_1(\lambda; t) = \left\langle \exp \left(i\lambda \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} G(t, t_n) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \right\rangle. \quad (24)$$

Так как приращения $\Delta W(t_n)$ являются независимыми, то последнее выражение в (24) приобретает вид

$$g_1(\lambda; t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left\langle \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \right\rangle. \quad (25)$$

Логарифмирование выражения (25) дает

$$\ln g_1(\lambda; t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \ln h(\lambda; t; t_n), \quad (26)$$

где введено обозначение

$$h(\lambda; t; t_n) = \left\langle \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \right\rangle. \quad (27)$$

Учитывая то, что для процесса с независимыми приращениями характеристическая функция приращений записывается через его одномерную характеристическую функцию, имеем

$$h(\lambda; t; t_n) = \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \rangle = \frac{\langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_{n+1})) \rangle}{\langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_n)) \rangle}. \quad (28)$$

Тогда

$$\ln h(\lambda; t; t_n) = \ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_{n+1})) \rangle - \ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_n)) \rangle. \quad (29)$$

Подстановка выражения (29) в формулу (26) дает

$$\ln g_1(\lambda; t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_{n+1})) \rangle - \ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_n)) \rangle}{\Delta t} \Delta t. \quad (30)$$

После замены в формуле (30) суммирования интегралом Ито и последующего потенцирования получившегося выражения получим:

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[\int_0^t \chi(\lambda G(t, \tau); \tau) d\tau \right], \quad (31)$$

где

$$\chi(\lambda G(t, \tau); \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln h_1(\lambda G(t, \tau); \tau), \quad (32)$$

$$h_1(\lambda G(t, \tau); \tau) = \langle \exp(i\lambda G(t, \tau) W(\tau)) \rangle. \quad (33)$$

Для случая, если процесс $W(t)$ является винеровским (см. формулу (18)) имеем

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} v \lambda^2 \int_0^t G^2(t, \tau) d\tau \right], \quad (34)$$

а если – пуассоновским (см. формулу (20)), то

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[v \int_0^t (g(\lambda G(t, \tau)) - 1) d\tau \right]. \quad (35)$$

Теперь перейдем к построению L -мерной характеристической функции. Для нахождения L -мерной характеристической функции запишем интегральное преобразование (9) для произвольных моментов времени t_l , причем для определенности будем считать, что $t_{l+1} > t_l$:

$$Z(t_l) = \int_0^{t_l} G(t_l, \tau) dW(\tau), \quad (36)$$

где $l = 1, 2, \dots, L$. Учитывая то, что выражение (36) представляет собой интеграл Ито, заменим его средним квадратическим пределом

$$Z(t_l) = \lim_{N_l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N_l-1} G(t_l, t_n) \Delta W(t_n). \quad (37)$$

Здесь N_l – число разбиений интервала $(0, t_l)$.

По определению L -мерная характеристическая функция $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ выражается формулой:

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \left\langle \exp \left(i \sum_{l=1}^L \lambda_l Z(t_l) \right) \right\rangle. \quad (38)$$

Подстановка выражения (37) в формулу (38) дает

$$\begin{aligned} g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) &= \left\langle \exp \left(i \sum_{l=1}^L \lambda_l \lim_{N_l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N_l-1} G(t_l, t_n) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \exp \left(i \lim_{N_L \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N_L-1} \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

При получении последнего выражения в формуле (39) введено условие

$$G(t_l, t_n) \Big|_{t_n > t_l} = 0. \quad (40)$$

Выполнение преобразований, аналогичных (24) и (25), дает

$$\begin{aligned} g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) &= \left\langle \lim_{N_L \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N_L-1} \exp \left(i \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \\ &= \lim_{N_L \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N_L-1} \left\langle \exp \left(i \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

После логарифмирования выражения (41) имеем

$$\ln g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \lim_{N_L \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N_L-1} \ln h(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L; t_n), \quad (42)$$

где введено обозначение

$$h(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L; t_n) = \left\langle \exp \left(i \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, t_n) \right) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle. \quad (43)$$

Далее выполняя операции, аналогичные (28) – (33), имеем

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\int_0^{t_L} \chi \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) d\tau \right], \quad (44)$$

где

$$\chi \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln h_1 \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right), \quad (45)$$

$$h_1 \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) = \left\langle \exp \left(i \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right) W(\tau) \right) \right\rangle. \quad (46)$$

При нахождении интеграла в выражении (44) необходимо учитывать условие (40):

$$G(t_l, \tau) \Big|_{\tau > t_l} = 0. \quad (47)$$

Формулы (31) – (33) являются частными случаями выражений (44) – (46) при $L = 1$.

В том случае, если процесс $W(t)$ является винеровским, то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} v \sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{\min(t_l, t_k)} G(t_l, \tau) G(t_k, \tau) d\tau \right], \quad (48)$$

а если пуассоновским, то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[v \int_0^t \left(g \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right) - 1 \right) d\tau \right]. \quad (49)$$

Для случая, когда ядро преобразования (9) имеет вид (12) формулы (44), (48) и (49) совпадают соответственно с выражениями (17), (19) и (21), полученными с помощью теории стохастических дифференциальных сис-

тем. В общем случае, когда интегральное преобразование (9) не сводится к конечномерной системе дифференциальных уравнений, то формулы (44), (48) и (49) описывают немарковский случайный процесс. На это, в частности, указывает то, что для выражения (49) в общем случае не выполняется условие (16).

Рассмотрим в качестве примера описание фликкер-шума. Пусть ядро преобразования (9) имеет вид:

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t - \tau}}, \quad (50)$$

а процесс $W(t)$ является винеровским. Тогда на основании формулы (34) при переходе от расходящегося интеграла к аппроксимирующей его конечной величине для одномерной характеристической функции имеем:

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left(-\frac{1}{2}v\lambda^2 \ln \frac{t}{\delta t}\right), \quad (51)$$

где $\delta t > 0$ – малая величина. Для L -мерной характеристической функции применение формулы (48) позволяет получить:

$$\begin{aligned} g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \\ = \exp\left[-\frac{1}{2}v\left(\sum_{l=1}^L \left(\lambda_l^2 \ln \frac{t}{\delta t}\right) + 4 \sum_{\substack{l, k=1 \\ l > k}}^L \left(\lambda_l \lambda_k \ln \frac{\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k} + \delta t + \sqrt{\delta t}}\right)\right)\right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Формулы (51) и (52) дают возможность определить математическое ожидание и момент второго порядка случайного процесса $Z(t)$:

$$\langle Z(t) \rangle = \frac{\partial g_1}{i \partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (53)$$

$$\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle = \frac{\partial^2 g_2}{i \partial \lambda_1 i \partial \lambda_2} \Big|_{\lambda_1, \lambda_2=0} = 2v \ln \left(\frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2 - t_1} + \delta t + \sqrt{\delta t}} \right). \quad (54)$$

Здесь $t_2 > t_1$. При $t_2 = t_1 = t$ формула (54) приобретает вид:

$$\langle Z^2(t) \rangle = \nu \ln \left(\frac{t}{\delta t} \right). \quad (55)$$

Момент второго порядка (54) позволяет определить одностороннюю спектральную плотность случайного процесса $Z(t)$:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ 4 \int_0^{t-\delta t} \langle Z(t-\tau) Z(t) \rangle \cos \omega \tau d\tau \right\} = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ 8\nu \int_0^{t-\delta t} \ln \left(\frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\tau + \delta t} + \sqrt{\delta t}} \right) \cos \omega \tau d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Интегрирование выражения (56) дает [13]:

$$G(\omega) = (-i) \frac{2\nu}{\omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[t^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\varepsilon+1/2)} ({}_1F_1(\varepsilon; \varepsilon+1/2; i\omega t) - {}_1F_1(\varepsilon; \varepsilon+1/2; -i\omega t)) \right], \quad (57)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция, ${}_1F_1(a; b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

В том случае, если $\omega t \gg 1$ вырожденные гипергеометрические функции в выражении (57) могут быть разложены в ряд по степеням выражения $1/\sqrt{\omega t}$. Тогда при сохранении только первого члена разложения имеем [14]:

$$\begin{aligned} G(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \\ &= (-i) \frac{2\nu}{\omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[t^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\varepsilon+1/2)} \left(\frac{\Gamma(\varepsilon+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left((-i\omega t)^{-\varepsilon} - (i\omega t)^{-\varepsilon} \right) \left(1 + O(1/\sqrt{\omega t}) \right) \right) \right] = \\ &= (-i) \frac{2\nu}{\omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[t^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \varepsilon \left(\ln(-i\omega t) - \ln(i\omega t) \right) \right] = \\ &= (-i) \frac{2\nu}{\omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[t^\varepsilon \Gamma(\varepsilon+1) \left((-i) \frac{\pi}{2} - i \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2\pi\nu}{\omega}. \end{aligned} \quad (58)$$

Таким образом, случайный процесс, описываемый L -мерной характеристической функцией (52), имеет спектральную плотность

$$G(\omega)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{2\pi\nu}{\omega}, \quad (59)$$

которая возрастает обратно-пропорционально частоте при её уменьшении. Это указывает на то, что этот процесс является фликкер-шумом [6].

Полученная L -мерная характеристическая функция (52) может найти применение для адекватного описания броуновского движения, так как флуктуации коэффициента диффузии броуновской частицы имеют характер фликкер-шума [1].

Одномерный случай броуновского движения. Рассмотренная выше простейшая модель броуновского движения применима только в том случае, если сила вязкого трения в среде может быть записана в виде (4). Но в реальном случае, кроме непосредственного соударения броуновской частицы с находящимися в близости от неё частицами среды, наблюдается увлечение частиц среды, расположенных на расстоянии от броуновской частицы [15]. Это приводит к существенному изменению характера вязкого трения и соотношение (4) становится несправедливым.

Учет увлечения вязкой жидкости движущимся телом приводит к необходимости использования для описания движения интегральных уравнений, что в свою очередь делает необходимым применение теории немарковских процессов [12]. Покажем, что даже в простейшем случае одномерного броуновского движения в безграничной среде неприменимо его описание как марковского процесса [16].

Рассмотрим движение плоской поверхности в вязкой жидкости, занимающей полупространство ($x > 0$). Будем считать, что плоскость расположена в начале координат (при $x = 0$), а её движение со скоростью $V(t)$ происходит в направлении, перпендикулярном оси X и лежащем в плоскости (см. рис. 1). На плоскость действуют сила вязкого трения $F(t)$ со стороны среды и случайная сила $\xi_V(t)$ (на единицу площади).

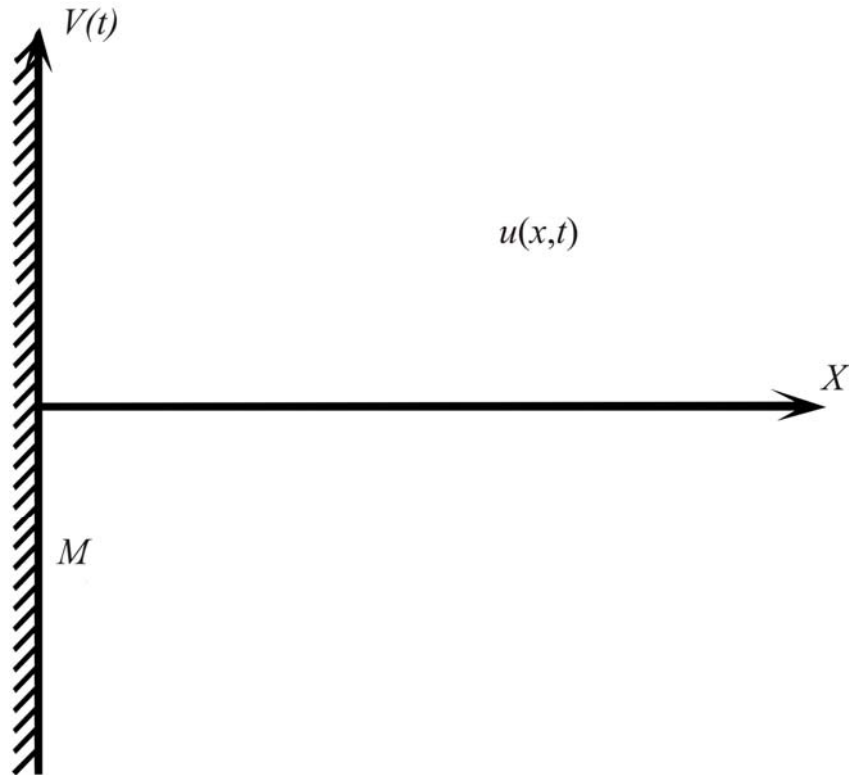


Рис. 1. Движение плоскости в вязкой жидкости

Движение плоскости в вязкой жидкости будет описываться уравнением (3) (где масса M считается отнесенной на единицу площади), а вместо соотношения (4) необходимо применять формулу для силы вязкого трения, действующей со стороны жидкости:

$$F_c(t) = \eta \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (60)$$

где $\eta = \nu\rho$ – вязкость жидкости, $u(x,t)$ – скорость течения жидкости. Считаем детерминированную силу $F_0(t) = 0$.

В рассматриваемом одномерном случае, считая скорость жидкости малой, уравнение для $u(x,t)$ при $x > 0$ принимает вид [15]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (61)$$

Граничное и начальное условия для уравнения (61) имеют форму:

$$u(x,0) = 0, \quad (62)$$

$$u(0,t) = V(t). \quad (63)$$

Тогда решение уравнения (61) с учетом условий (62) и (63) приобретает форму [17]:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] V(\tau) d\tau, \quad (64)$$

Найдем производную выражения (64) по координате x :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2x^2}{4\nu(t-\tau)^{5/2}} \right] \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] V(\tau) d\tau. \quad (65)$$

Вычисление интеграла (65) по частям дает:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (66)$$

Подстановка выражения (66) в формулу (60) позволяет определить зависимость силы $F_c(t)$ от скорости $V(t)$:

$$F_c(t) = -\frac{\eta}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (67)$$

Эта формула для рассматриваемого случая заменяет выражение (4). Формула (67) получена другим способом в работе [15].

Таким образом, описание флуктуаций скорости плоской поверхности в вязкой жидкости, заполняющей полупространство, сводится к решению системы уравнений (3) и (67). Так как уравнение (67) имеет вид интегрального уравнения, то случайный процесс $F_c(t)$, а, следовательно, и процесс $V(t)$, представляют собой немарковские случайные процессы.

Отметим, что описание теплопроводности в одномерной безграничной среде сводится к выражению, аналогичному (67) [16]. При изучении внутреннего трения в одномерных упругих системах, которое считается

результатом рассеяния волн на случайных неоднородностях среды, также возникают выражения, подобные (67) (см. [18, 19]).

Система уравнений (3) и (67) может быть записана в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода [20]:

$$Z(t) + A \int_0^t Z(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \xi(t), \quad (68)$$

где

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad A = \frac{\eta}{M\sqrt{\pi\nu}}, \quad \xi(t) = \frac{\xi_V(t)}{M}. \quad (69)$$

Очевидно, что процесс $Z(t)$, являющийся решением интегрального уравнения (68), представляет собой немарковский случайный процесс.

Решение интегрального уравнения (68) имеет вид

$$Z(t) = \int_0^t (\delta(t-\tau) - R(t,\tau)) \xi(\tau) d\tau, \quad (70)$$

где резольвента (см. [21])

$$R(t,\tau) = \frac{1}{t-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} r_k (t-\tau)^{\frac{k}{2}}, \quad r_k = \frac{A^k \pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}. \quad (71)$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Расчетный график функции $R(t-\tau)$ изображен на рис. 2. Видно, что возрастанием разности $t-\tau$ наблюдается резное уменьшение значения функции $R(t-\tau)$.

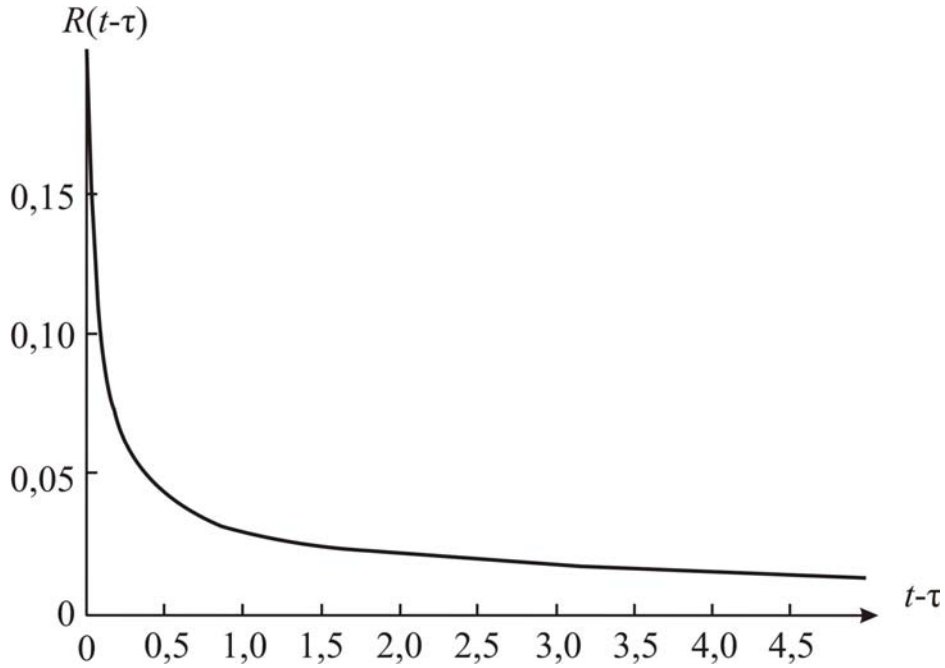


Рис. 2. График функции $R(t - \tau)$

Используя метод описания немарковских случайных процессов, изложенный в [12], для одномерной и L -мерной характеристических функций случайного процесса $Z(t)$, задаваемого линейным интегральным соотношением (70), получим:

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \left(r_1^2 \ln \frac{t}{\delta t} + \sum_{k=2}^{\infty} r_k^2 \frac{t^{k-1}}{k-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{m+n} r_m r_n \frac{t^{\frac{m+n-2}{2}}}{m+n-2} + r_2 + \delta(t) \right) \right], \quad (72)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \left(\sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k (\delta(t_l - t_k) + R(t_l, t_k)) + \sum_{m,n=1}^{\infty} r_m r_n f_{mn} \right) \right], \quad (73)$$

где σ – интенсивность случайного процесса $\xi(t)$, распределение которого имеет вид кривой Гаусса, δt – малая положительная величина, $\delta(x)$ – дельта-функция;

$$f_{mn} = \begin{cases} 2 \ln \frac{\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}} & \text{при } m, n = 1, \\ \sum_{s=0}^{\frac{m-1}{2}} C_s^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-s-1}{2}} \frac{t_l^{\frac{s+\frac{n}{2}}{2}} - (t_l - t_k)^{\frac{m+n-1}{2}}}{\frac{n}{2} + s} & \text{при } m - \text{четном}, \\ \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} C_s^{\frac{n-1}{2}} \frac{(t_l - t_k)^{\frac{n-s-1}{2}} t_k^{\frac{m+s}{2}}}{\frac{m}{2} + s} & \text{при } m - \text{нечетном и } n - \text{четном}, \\ t_l^{a+\frac{3}{2}} \sum_{s=1}^a \frac{(2a+1)(2a-1)\dots(2a-2s+3)(t_k - t_l)^s}{(a+b+2)(a+b+1)\dots(a+b-s+2)} t_k^{a-s+\frac{1}{2}} - \\ - \sum_{s=0}^b \frac{(2a+1)(2a-1)\dots(2a-2s+3)}{2^s (a+b+2)(a+b+1)\dots(b-s+1)} \frac{(t_k - t_l)^{a+s+1} a!! \sqrt{t_k}}{2^{a+1}} + \\ + \frac{a!! b!! (t_k - t_l)^{a+b+2}}{(a+b+2)! 2^{a+b+2} (-1)^{b+1}} 2 \ln \frac{\sqrt{t_k} + \sqrt{t_l}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}} & \text{при других } m, n. \end{cases} \quad (74)$$

Здесь C_a^b – соответствующий биномиальный коэффициент,

$$a = \frac{m-3}{2}, \quad b = \frac{n-3}{2}.$$

Полученные выражения (72) и (73) позволяют определить любые характеристики случайного процесса $Z(t)$. В частности, для корреляционной функции $\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle$ получим:

$$\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle = \sigma \left(\delta(t_2 - t_1) + R(t_2, t_1) + \sum_{m,n=1}^{\infty} r_m r_n f_{mn} \right), \quad (75)$$

где функция f_{mn} определяется выражением (74), в котором сделана замена $t_k = t_1, t_l = t_2$. Последняя формула дает возможность рассчитать спектральную плотность случайного процесса $Z(t)$ согласно определению [9]

$$G_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle Z(t)Z(t-\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (76)$$

Преобразование Лапласа уравнения (68) позволяет записать его в изображениях:

$$\hat{Z}(p) + A \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \hat{Z}(p) = \hat{\xi}(p) \quad (77)$$

или

$$\hat{Z}(p) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + A\sqrt{\pi}} \hat{\xi}(p), \quad (78)$$

где $\hat{Z}(p)$ и $\hat{\xi}(p)$ – изображения функций $Z(t)$ и $\xi(t)$ соответственно.

Так как спектральная плотность процесса $\xi(t)$ постоянна и равна его интенсивности

$$G_{\xi} = \sigma, \quad (79)$$

то в соответствии с формулой (78) спектральная плотность процесса $Z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ принимает вид:

$$G_Z(\omega) = \left| \frac{\sqrt{i\omega}}{\sqrt{i\omega} + A\sqrt{\pi}} \right|^2 \sigma \quad (80)$$

или

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega\sigma}{\omega + A\sqrt{2\pi\omega} + \pi A^2}. \quad (81)$$

На рис. 3 показаны в сравнении графики спектральных плотностей для $A = 0,1 \text{ с}^{-1/2}$ при численном расчете с помощью формул (75) и (76) (при $t = 10^5 \text{ с}$) и задаваемой формулой (81). Видно, что наблюдается хорошее совпадение результатов, получаемых разными методами. Расхождение при больших частотах связано, видимо, с ограниченным числом членов бесконечного ряда в (71), используемого при численном расчете.

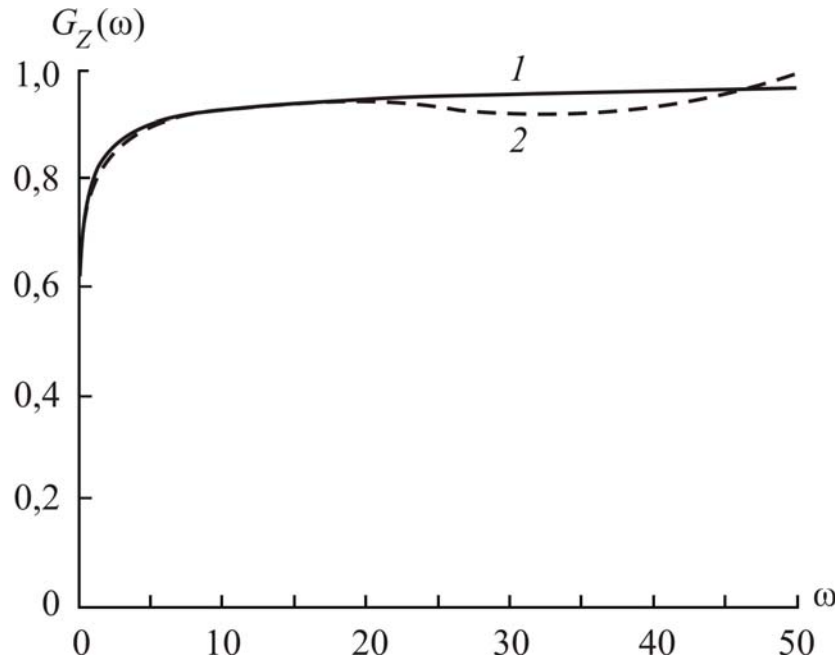


Рис. 3. Графики спектральной плотности $G_Z(\omega)$, определенной по формуле (81) (кривая 1), и при численном расчете (кривая 2)

Полученное выражение (81) с учетом формул (69) позволяет определить спектральную плотность флуктуаций скорости $V(t)$:

$$G_V(\omega) = \frac{\sigma}{\omega(\omega + A\sqrt{2\pi\omega + \pi A^2})}, \quad (82)$$

где в соответствии с формулой (5)

$$\sigma = \frac{2\gamma kT}{M^2}. \quad (83)$$

Для малых частот при условии $\omega \ll A^2$ формула (82) приобретает вид:

$$G_V(\omega)|_{\omega \ll A^2} = \frac{\sigma}{\pi A^2 \omega} \quad (84)$$

или, с учетом формул (69) и (83),

$$G_V(\omega)|_{\omega \ll A^2} = \frac{2\gamma kT}{\eta r \omega}. \quad (85)$$

Из выражения (85) следует, что флуктуации скорости движения $V(t)$ плоской поверхности в вязкой жидкости представляют собой фликкер-шум [6], для которого характерна обратная зависимость от частоты для диапа-

зона малых частот. На рис. 4 приведены зависимости спектральной плотности, рассчитанные по формулам (6) и (82). Хорошо видно, что для больших частот характер этих двух зависимостей аналогичен, а при малых — наблюдается существенное отличие, связанное с наличием фликкер-шума в случае, описываемом формулой (82).

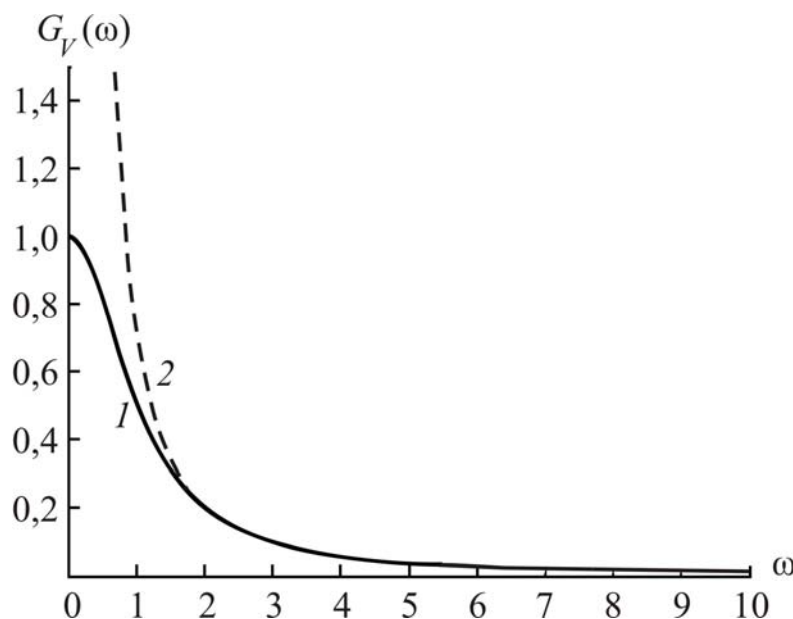


Рис. 4. Графики спектральных плотностей $G_V(\omega)$, рассчитанные по формулам (6) (кривая 1) и (82) (кривая 2)

Отметим, что флуктуации температуры плоской поверхности в задаче о одномерной теплопроводности так же имеют спектральную плотность вида (82), а, следовательно, для них характерно наличие фликкер-шума. Это в свою очередь, учитывая зависимость кинетических коэффициентов от температуры, должно приводить к флуктуациям указанных коэффициентов в низкочастотной области спектра со спектральной плотностью, имеющей вид фликкер-шума.

Таким образом, при рассмотрении простой модельной задачи одномерного броуновского движения, установлено, что флуктуации скорости движения $V(t)$ представляют собой немарковский случайный процесс с

характерной особенностью типа фликкер-шум в низкочастотной части спектра.

Броуновское движение шарообразной частицы в неограниченной среде. При описании броуновского движения шарообразной частицы с учетом увлечения частиц среды вместо формулы (4) необходимо использовать выражение [15]

$$F_c(t) = -2\pi\rho R^3 \left[\frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (86)$$

В последнем выражении момент времени $t = 0$ принят за начало движения частицы.

Подставляя (86) в (3), получим уравнение:

$$\left(M + \frac{2}{3} \pi\rho R^3 \right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi\rho\nu R V(t) + 6\rho R^2 \sqrt{\pi\nu} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F_0(t) + \xi_V(t). \quad (87)$$

Введя замены

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad (88)$$

$$A = \frac{6\pi\rho\nu R}{M + \frac{2}{3} \pi\rho R^3}, \quad B = R \sqrt{\frac{1}{\pi\nu}}, \quad (89)$$

$$\tilde{F}_0(t) = \frac{F_0(t)}{M + \frac{2}{3} \pi\rho R^3}, \quad \tilde{\xi}(t) = \frac{\xi_V(t)}{M + \frac{2}{3} \pi\rho R^3}, \quad (90)$$

придем к выражению

$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}} \right) Z(\tau) d\tau = \tilde{F}_0(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (91)$$

в котором учтено, что

$$V(t) = \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (92)$$

т.к. $V(0) = 0$. Выражение (91) описывает случайный процесс $Z(t)$, являющийся в этом случае немарковским случайным процессом. Таким образом, использование для силы сопротивления выражения (86) вместо (4) приводит к необходимости применения интегральных уравнений, а, следовательно, и теории немарковских процессов [12, 16, 22].

Решение интегрального уравнения (91) имеет вид [20]:

$$Z(t) = \int_0^t (\delta(t - \tau) - R(t, \tau)) (\tilde{F}_0(t) + \tilde{\xi}(t)) d\tau, \quad (93)$$

где резольвента

$$R(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t, \tau). \quad (94)$$

В последнем выражении члены ряда определяются с помощью рекуррентного соотношения:

$$K_{n+1}(t, \tau) = \int_{\tau}^t K_1(t, s) K_n(s, \tau) ds, \quad (95)$$

где

$$K_1(t, \tau) = A \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t - \tau}} \right). \quad (96)$$

Вычисление по формуле (95) приводит к следующим выражениям для первых членов ряда (94):

$$K_2(t, \tau) = -A^2 \left[(t - \tau) + 4B(t - \tau)^{1/2} + \pi B^2 \right] \quad (97)$$

$$K_3(t, \tau) = A^3 \left[\frac{1}{2}(t - \tau)^2 + 4B(t - \tau)^{3/2} + 3\pi B^2(t - \tau) + 2\pi B^3(t - \tau)^{1/2} \right], \quad (98)$$

$$K_4(t, \tau) = -A^4 \left[\frac{1}{6}(t - \tau)^3 + \frac{32}{15}B(t - \tau)^{5/2} + 3\pi B^2(t - \tau)^2 + \right. \\ \left. + \frac{16}{3}\pi B^3(t - \tau)^{3/2} + \pi^2 B^4(t - \tau) \right]. \quad (99)$$

Из выражений (96) – (99) видно, что ряд (94) является знакочередующимся, причем резольвента $R(t, \tau)$ является функцией только от разности аргументов: $R(t, \tau) = R(t - \tau)$. Из (96) – (99) следует также, что абсолютные значения членов ряда (за исключением первого) возрастают при росте $t - \tau$ таким образом, что $|K_n(t - \tau)| \rightarrow \infty$ при $(t - \tau) \rightarrow \infty$. Для не слишком больших t ($t \leq 10$ с) и $A \ll 1$ с⁻¹ ряд (94) с большой степенью точности можно заменить следующей суммой:

$$R(t - \tau) = A - \pi A^2 B^2 + \frac{AB}{\sqrt{t - \tau}} - 4BA^2 \sqrt{t - \tau}. \quad (100)$$

Будем далее считать, что $\tilde{F}_0(t) = 0$. В этом случае (93) примет вид:

$$Z(t) = \int_0^t [\delta(t - \tau) - R(t - \tau)] \tilde{\xi}(\tau) d\tau. \quad (101)$$

Используя метод описания немарковских случайных процессов, изложенный в [12], для одномерной и L -мерной характеристических функций случайного процесса $Z(t)$, задаваемого интегральным уравнением (101), для не слишком больших t ($t \leq 10$ с) и $A \ll 1$ с⁻¹ получим:

$$g_1(\lambda; t) = \\ = \exp \left[-\frac{1}{2} \tilde{\sigma} \lambda^2 \left(A^2 B^2 \ln \frac{t}{\delta t} - 4ABC\sqrt{t} + (C^2 - 8A^2 B^2)t + \frac{16}{3} A^2 BC\sqrt{t^3} + 8A^4 B^2 t^2 \right) \right], \quad (102)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\tilde{\sigma} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \lambda_l \lambda_k Q_{lk}(t_l, t_k) \right]. \quad (103)$$

Здесь $\tilde{\sigma}$ – интенсивность случайного процесса $\tilde{\xi}(t)$, δt – малая положительная величина, а функция $Q_{lk}(t_l, t_k)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
Q_{lk}(t_l, t_k) = & \frac{1}{2} C^2 t_k - ABC(\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k} - \sqrt{t_l - t_k}) + \\
& + \frac{4}{3} A^2 BC(\sqrt{t_l^3} + \sqrt{t_k^3} - \sqrt{(t_l - t_k)^3}) - 4A^3 B^2 \sqrt{t_k t_l} + \\
& + A^2 B^2 (1 + 8A^2(t_l - t_k)) \ln \frac{\sqrt{t_k} + \sqrt{t_l}}{\sqrt{t_l - t_k} + \sqrt{\delta t} + \sqrt{\delta t}} + 4A^4 B^2 \sqrt{t_k t_l^3}.
\end{aligned} \tag{104}$$

В выражениях (102) и (104) $C = -A + \pi A^2 B^2$.

Многомерные характеристические функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$, задаваемые выражением (103), позволяют найти моменты любого порядка случайного процесса $Z(t)$ [9]. В частности, для корреляционной функции получим:

$$\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle = 2\tilde{\sigma} Q_{12}(t_1, t_2). \tag{105}$$

Для нахождения спектральной плотности случайного процесса $Z(t)$ найдем преобразование Лапласа уравнения (91) при $\tilde{F}_0(t) = 0$, что позволяет записать его в изображениях:

$$\hat{Z}(p) \left[1 + A \left(\frac{1}{p} + \frac{B\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \right) \right] = \hat{\xi}(p) \tag{106}$$

или

$$\hat{Z}(p) = \frac{p}{p + AB\sqrt{\pi p} + A} \hat{\xi}(p), \tag{107}$$

где $\hat{Z}(p)$ и $\hat{\xi}(p)$ – изображения функций $Z(t)$ и $\xi(t)$ соответственно.

Ввиду того, что спектральная плотность $G_{\tilde{\xi}} = \tilde{\sigma}$ процесса $\tilde{\xi}(t)$ постоянна и равна

$$G_{\tilde{\xi}} = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \right)^2}, \tag{108}$$

то в соответствии с формулой (107) спектральная плотность процесса $Z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ принимает вид:

$$G_Z(\omega) = \left| \frac{i\omega}{i\omega + AB\sqrt{\pi \cdot i\omega + A}} \right|^2 G_\xi \quad (109)$$

или

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2 B^2 \pi\omega + A^2 B\sqrt{2\pi\omega} + A^2} G_\xi. \quad (110)$$

Из последнего выражения может быть найдена спектральная плотность флуктуаций скорости броуновской частицы $V(t)$. Согласно выражению (88)

$$G_V(\omega) = \frac{G_Z(\omega)}{\omega^2}, \quad (111)$$

или

$$G_V(\omega) = \frac{G_\xi}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2 B^2 \pi\omega + A^2 B\sqrt{2\pi\omega} + A^2}. \quad (112)$$

Сравнение формул (112) и (6) показывает, что использование для силы сопротивления выражения (86) вместо (4) приводит к существенному различию спектральных плотностей флуктуаций скорости частицы, в особенности, в полосе низких и средних частот. На рис. 5 показаны в сравнении графики спектральных плотностей, даваемые формулами (6) и (112).

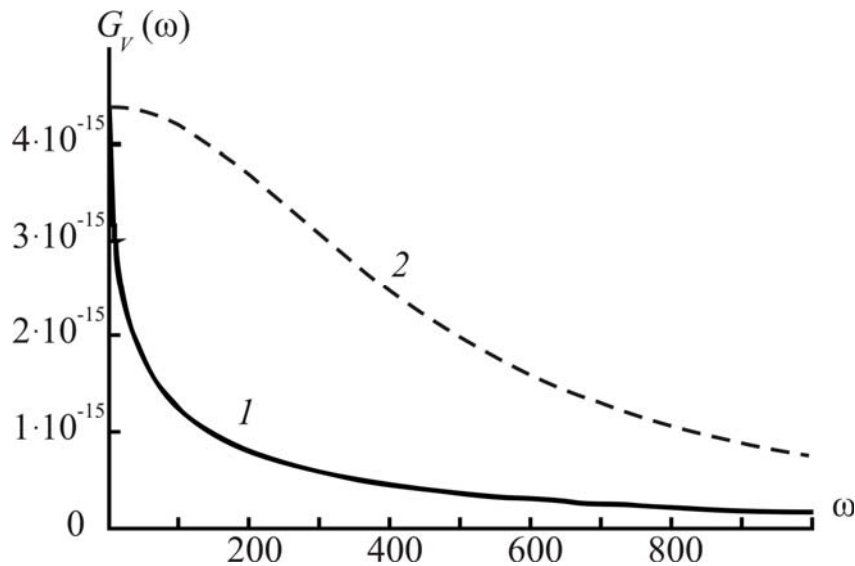


Рис. 5. Графики спектральных плотностей, задаваемые формулами (6) (кривая 2) и (112) (кривая 1) при $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $R = 10^{-4} \text{ м}$,
 $M = 4 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$, $T = 300 \text{ К}$

Пусть теперь на сферическую частицу вдоль оси X кроме случайной силы и силы сопротивления действует возвращающая сила $F_0(t) = -kX(t)$. В этом случае уравнение (91) примет вид:

$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}}\right) Z(\tau) d\tau = -\tilde{k}X(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (113)$$

где

$$\tilde{k} = \frac{k}{M + \frac{2}{3} \pi \rho R^3}. \quad (114)$$

Найдем в этом случае спектральные плотности процессов $Z(t)$ и $V(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Учтя, что преобразование Лапласа функций $X(t)$ и $Z(t)$ связаны соотношением $\hat{X}(p) = \hat{Z}(p)/p^2$, для уравнения (113) в изображениях имеем:

$$\hat{Z}(p) \left[1 + \frac{k}{p^2} + \frac{AB\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} + \frac{A}{p}\right] = \hat{\xi}(p) \quad (115)$$

или

$$\hat{Z}(p) = \frac{p^2}{p^2 + AB\sqrt{\pi p^3} + Ap + \tilde{k}} \hat{\xi}(p). \quad (116)$$

Выполнив процедуру, проведенную при выводе формул (110) и (112), для спектральных плотностей процессов $Z(t)$ и $V(t)$ получим:

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^4}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\tilde{\xi}}, \quad (117)$$

$$G_V(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G'_\xi. \quad (118)$$

Из (118) легко найти спектральную плотность для координаты $X(t)$.

Получим:

$$G_X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G'_\xi. \quad (119)$$

Сравним последнее выражение со спектральной плотностью классического осциллятора, которая получается из (119) при условии, что $B = 0$ с^{1/2}, а в формулах (89) (для коэффициента A), (108) и (114) слагаемое $\frac{2}{3}\pi\rho R^3$, стоящее в знаменателе, обращается в нуль. В этом случае (119) переходит в формулу

$$G_X^{клас}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + (A'^2 - 2k')\omega^2 + k'^2} G'_\xi, \quad (120)$$

где теперь $A' = \frac{6\pi\rho\nu R}{M}$, $k' = \frac{k}{M}$, $G'_\xi = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{M^2}$.

На рис. 6 и 7 изображены спектральные плотности, задаваемые выражениями (119) и (120) при $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 10^3$ кг/м³, $k = 10^{-2}$ Н/м, $R = 10$ мкм (рис. 6), $R = 100$ мкм (рис. 7). Плотность частицы при этом принимается равной плотности среды.

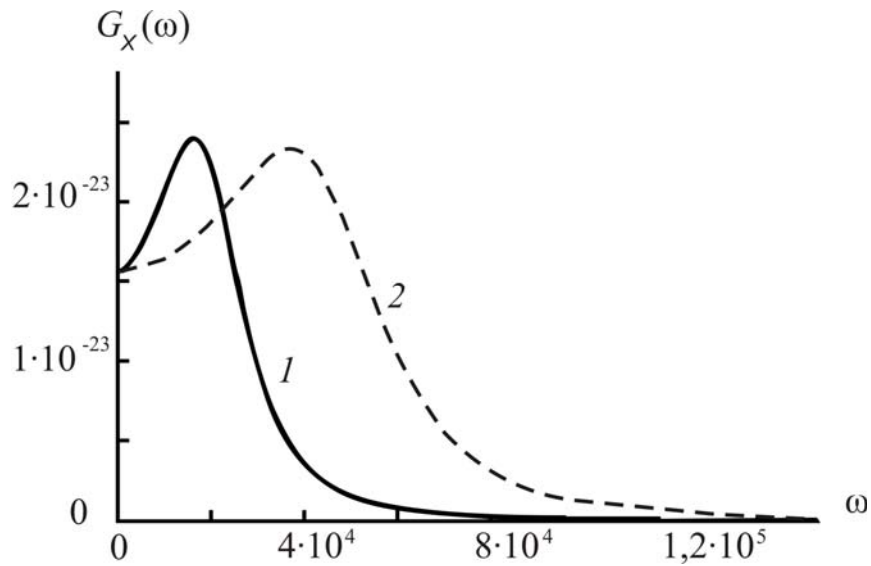


Рис. 6. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (119) (кривая 1) и (120) (кривая 2) при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k = 10^{-2} \text{ Н/м}$, $R = 10 \text{ мкм}$

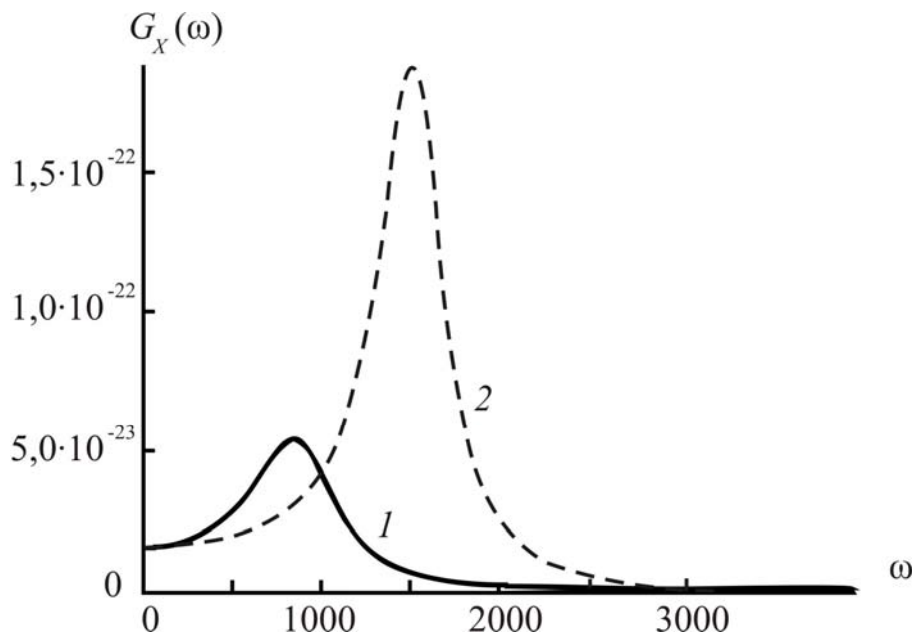


Рис. 7. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (119) (кривая 1) и (120) (кривая 2) при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k = 10^{-2} \text{ Н/м}$, $R = 100 \text{ мкм}$

Из графиков видно, что увеличением размера частиц формы кривых становятся похожими, при этом классическому случаю соответствует большее амплитудное значение спектральной плотности. Этот эффект становится наиболее заметным при больших размерах частиц. Из графиков

видно также, что максимум спектральной плотности в классическом случае соответствует более высокой резонансной частоте. Этот факт является следствием того, что при неклассическом описании к массе частицы добавляется некоторая «эффективная» масса $\frac{2}{3}\pi\rho R$.

Таким образом, проведенное описание движения броуновской частицы шарообразной формы в неограниченной вязкой среде позволило установить, что флуктуации её скорости представляют собой немарковский случайный процесс. Полученные резонансные кривые для механического осциллятора, размещенного в вязкой безграничной среде, по своей форме отличается от классической. Последний результат может иметь существенное значение для устройств демпфирования колебаний.

Статистическое описание реологических сред. При рассмотрении физических процессов в реологических средах связи между описывающими их величинами выражают обычно в виде соответствующих дифференциальных уравнений, которым соответствуют комбинации так называемых идеальных реологических элементов (упругости, вязкости или сухого (кулоновского) трения) [21]. В частности, распространена модель из параллельного соединения вязкого и упругого элементов, соответствующая гипотетическому материалу Фойхта–Кельвина. Ясно, что полное напряжение в этом случае равно сумме напряжений в упругом и вязком элементах, а деформации элементов одинаковы. Отсюда легко получить следующее уравнение состояния, связывающее деформацию ε и напряжение σ :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{T} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (121)$$

где параметр $T = \frac{\eta}{E}$ называют временем релаксации, E – модуль упругости, η – коэффициент вязкости.

Заметим, что выражение (121) может быть записано в интегральной форме с ядром экспоненциального вида:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta_0} \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau. \quad (122)$$

Однако, в тех случаях, когда временные масштабы происходящих в реологической среде динамических изменений меньше или сравнимы с временами релаксации среды, такое описание оказывается слишком грубым [23]. Это имеет место, в частности, при движении броуновской частицы в реологической среде или в случае короткопериодных внешних воздействий, оказываемых на нее. Одним из подходов, используемых при рассмотрении таких и подобных им задач, является описание связей между соответствующими физическими величинами в виде интегральных операторов. Например, связь между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ реологического материала при линейной деформации может быть выражена интегральными операторами Вольтерра второго рода [20]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (123)$$

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right). \quad (124)$$

Здесь $K(t-\tau)$ – ядро ползучести, $R(t-\tau)$ – ядро релаксации, E – мгновенный модуль упругости. В выражениях (123) и (124) принято, что напряжения и деформации отсутствуют при $t < 0$. Соотношение (124) является решением уравнения (123), вследствие чего между ядрами ползучести $K(t-\tau)$ и релаксации $R(t-\tau)$ имеется связь [20]. Конкретный характер поведения кривых, соответствующих ядрам ползучести и релаксации, определяется обычно опытным путем. Наиболее часто экспериментальные кривые для ядра ползучести аппроксимируются выражением вида [24]

$$K(t - \tau) = \frac{A}{(t - \tau)^\alpha}, \quad (125)$$

где A и α – постоянные, $0 < \alpha \leq 1$. Такие ядра применяют, например, при описании расплавов металлов, растворов полимеров и др.

Ржаницын предложил ядра более общего типа [24]

$$K(t - \tau) = \frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{(t - \tau)^\alpha}, \quad (126)$$

где β – постоянный параметр. Ядра (126) обобщают как ядра вида (125), так и ядра, соответствующие дифференциальным моделям (при $\alpha = 0$). Функция (126) описывает широкий класс реологических сред (в частности, стеклообразные полимеры (glass polymers) и расплавы металлов при больших напряжениях для не слишком больших t , если $\beta = 0$ и $\alpha = \frac{2}{3}$; растворы полимеров, если $0 < \alpha < 1$ (в зависимости от химического состава и концентрации полимера) и $\beta = 0$ – в начальные моменты времени или $\beta \neq 0$ – по прошествии некоторого времени с начала действия нагрузки [26]; и др.).

Ядрам ползучести (126) соответствуют ядра релаксации $R(t - \tau)$ вида [21]

$$R(t - \tau) = \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{t - \tau} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{A^n \Gamma^n(1 - \alpha)}{\Gamma(n(1 - \alpha))} (t - \tau)^{n(1-\alpha)}, \quad (127)$$

в котором $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Как показано в [25], интегральное уравнение движения системы с одной степенью свободы под действием переменной силы $f(t)$ в среде, подчиняющейся закону наследственной вязкоупругости, имеет вид:

$$\ddot{q}(t) = -kq(t) + \int_0^t \Phi(t - \tau) \varphi(q(\tau), \tau) d\tau + f(t), \quad (128)$$

где q – обобщенная координата, k – коэффициент упругости, $\Phi(t - \tau)$ – ядро, отражающее влияние наследственной вязкоупругости, $\varphi(y, \tau)$ – зависимость силы от обобщенной координаты, в общем случае нелинейная.

Применение последней формулы к движению броуновской частицы (роль обобщенной координаты играет в этом случае координата $X(t)$) с ядром влияния степенного вида, подобного (125) приводит к задаче, рассмотренной выше (выражение (113)). Таким образом, движение броуновской частицы в реологических средах описывается с помощью интегральных операторов (128), и также, как и ранее, представляет собой немарковский процесс.

Рассмотрим теперь среду из реологического материала, представляющую собой ограниченное плоскостью полупространство. Связь между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ в этой среде задается интегральными уравнениями (123) и (124). Пусть на одну из границ среды помимо некоторого заданного напряжения $\sigma_0(t)$, действует случайная нагрузка $\xi_\sigma(t)$, представляющая собой белый шум интенсивности ν . Суммарное напряжение на границе стержня $\sigma(t)$ в этом случае равно

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \xi_\sigma(t). \quad (129)$$

Уравнение (123) примет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\int_0^t (\delta(t - \tau) + K(t - \tau)) \sigma_0(\tau) d\tau + \int_0^t (\delta(t - \tau) + K(t - \tau)) \xi_\sigma(\tau) d\tau \right), \quad (130)$$

где $\delta(t - \tau)$ – дельта-функция. В выражении (130) первое слагаемое является заданной функцией времени, а второе, определяемое формулой

$$\varepsilon_c(t) = \frac{1}{E} \int_0^t (\delta(t - \tau) + K(t - \tau)) \xi_\sigma(\tau) d\tau, \quad (131)$$

является немарковским случайным процессом.

Найдем статистические характеристики процесса $\varepsilon_c(t)$ в случае ядра (126). Подставляя (126) в (131), получим

$$\varepsilon_c(t) = \frac{1}{E} \int_0^t \left(\delta(t-\tau) + \frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^\alpha} \right) \xi_\sigma(\tau) d\tau. \quad (132)$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Тогда для одномерной характеристической функции имеем:

– если $\alpha = 1$:

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{v\lambda^2}{E^2} \left(A^2 \left(\frac{1}{\delta t} - 2\beta Ei(-2\beta t) - \frac{\exp(-2\beta t)}{t} \right) + \frac{1}{2} \frac{A}{\delta t^\alpha} + \frac{1}{2} \delta(0) \right) \right] \quad (133)$$

– если $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{v\lambda^2}{E^2} \left(A^2 Ei(-2\beta t) + \frac{1}{2} \frac{A}{\delta t^\alpha} + \frac{1}{2} \delta(0) \right) \right]. \quad (134)$$

Здесь δt – бесконечно малая положительная величина, $Ei(x)$ – интегральная показательная функция.

Для определения спектральной плотности процесса $\varepsilon_c(t)$ при $t \rightarrow \infty$ $G_\varepsilon(\omega)$ воспользуемся тем, что [9]

$$G_\varepsilon(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} = |\hat{\varepsilon}_c(i\omega)|^2, \quad (135)$$

где $\hat{\varepsilon}_c(p)$ – преобразование Лапласа функции $\varepsilon_c(t)$. Получим:

1) если $\alpha = 1$, то $\hat{\varepsilon}_c(i\omega) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(p+\beta)^\varepsilon}$, где ε – малая положительная ве-

личина. Раскладывая знаменатель в ряд, получим приближенное равенство $(p+\beta)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln(p+\beta)$. Если $\ln(\beta+i\omega) = a+bi$, то $\beta+i\omega = e^a(\cos b + i \sin b)$.

Отсюда легко получить, что $a = \ln \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, $b = \arctan \frac{\omega}{\beta}$. Окончательно находим

$$G_\varepsilon(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\nu}{E^2} \left(1 + \frac{\Gamma^2(\varepsilon) + 2\Gamma(\varepsilon) \left(2 + 2\varepsilon \ln \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \right)}{\left(1 + \varepsilon \ln \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \right)^2 + \varepsilon^2 \arctan^2 \frac{\omega}{\beta}} \right). \quad (136)$$

При малых ω последнее выражение переходит в формулу

$$G_\varepsilon(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\nu}{E^2} \left(1 + \frac{\Gamma^2(\varepsilon)}{1 + \varepsilon^2 \arctan^2 \frac{\omega}{\beta}} \right). \quad (137)$$

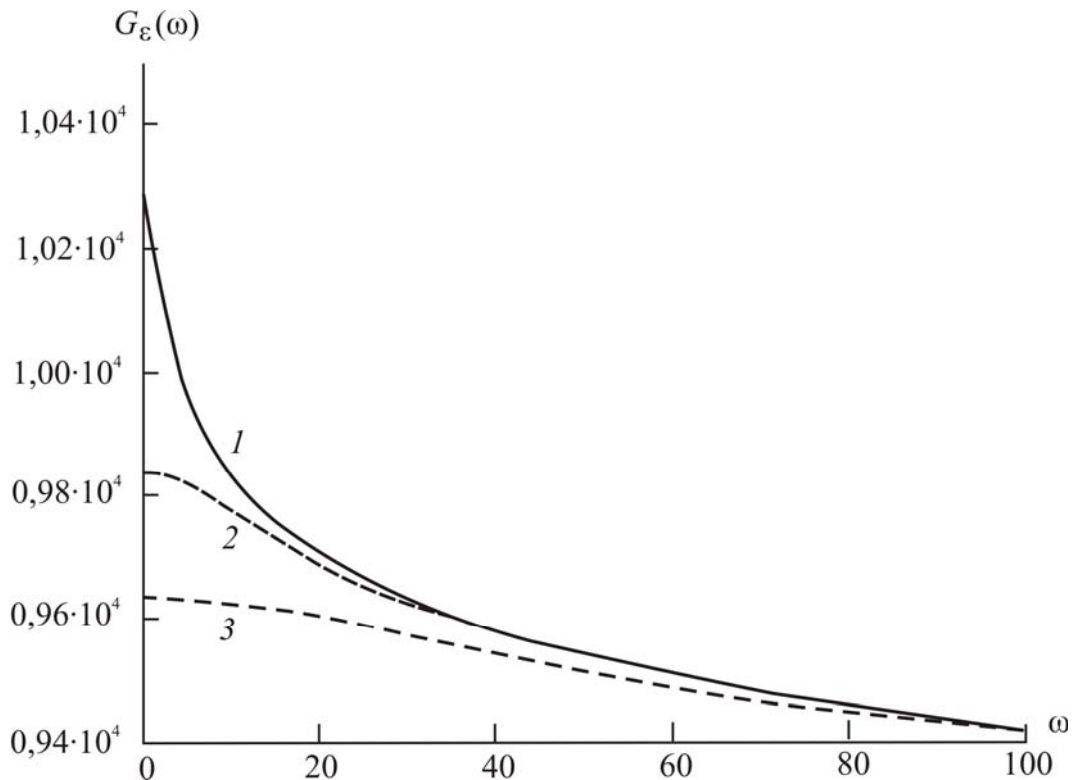


Рис. 8. Графики спектральной плотности $G_\varepsilon(\omega)$, задаваемые формулой (136) при $\beta = 1 \text{ с}^{-1}$ (1), $\beta = 10 \text{ с}^{-1}$ (2), $\beta = 30 \text{ с}^{-1}$ (3).

График функции (136) для разных β и единичных значениях E и ν приведен на рис. 8. Видно, что графики функций медленно убывают с ростом ω , совпадая при больших частотах и стремясь к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. За-

метим, что выбор постоянной ε практически не влияет на характер изменения графиков функций, изменяя лишь их значения. Выбором соответствующих констант спектральная плотность (136) может быть нормирована при любом ε .

2) если $\alpha = \frac{1}{2}$, то

$$G_\varepsilon(\omega) = \frac{\nu}{E^2} \left(1 + \frac{\pi A^2 + A \sqrt{2\pi(\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega^2})}}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \right), \quad (138)$$

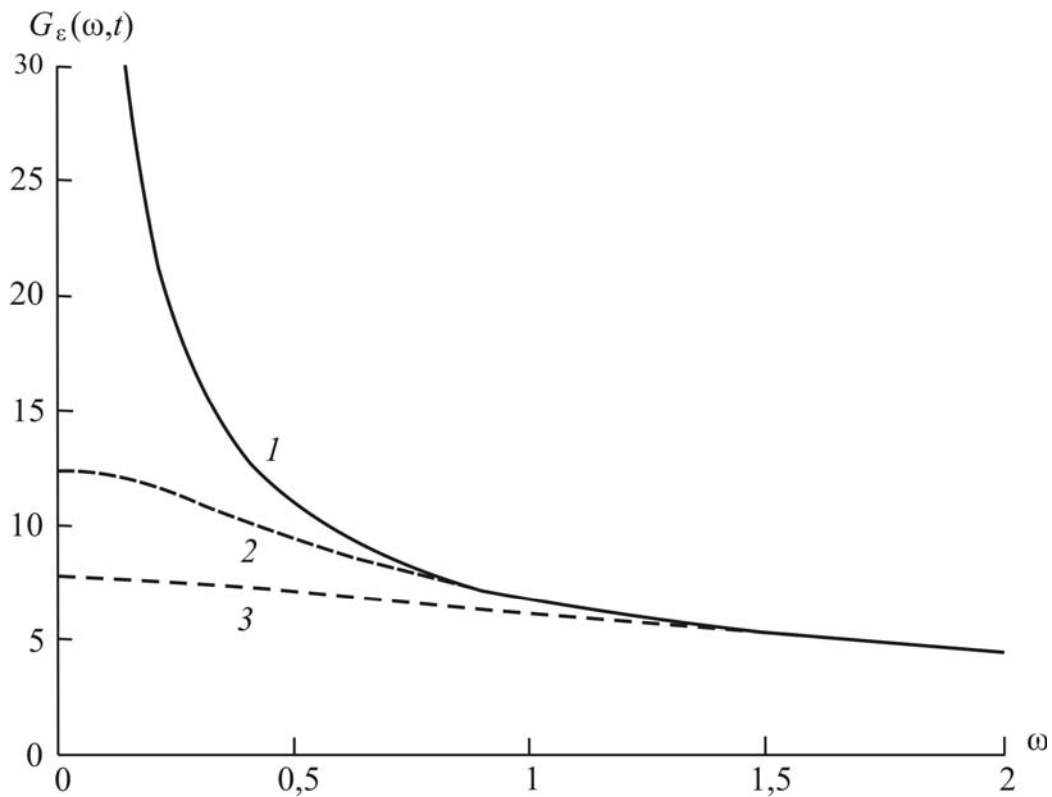


Рис. 9. Графики спектральной плотности $G_\varepsilon(\omega)$, задаваемые формулой (138) при $\beta = 0 \text{ с}^{-1}$ (1), $\beta = 0,5 \text{ с}^{-1}$ (2), $\beta = 1 \text{ с}^{-1}$ (3).

Графики спектральной плотности $G_\varepsilon(\omega)$, определяемой выражением (138), для различных β и единичных значениях E и ν приведены на рис. 9. Видно, что при больших ω графики функций приближаются друг к другу, стремясь к постоянной величине $\frac{\nu}{E^2}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Из рисунка также ясно,

что при $\omega \rightarrow 0$ спектральная плотность $G_\varepsilon(\omega)$ стремится к константе, тем меньшей, чем больше β . В пределе $\beta \rightarrow 0$ спектральная плотность $G_\varepsilon(\omega)$ процесса $\varepsilon_c(t)$ носит характер спектральной плотности фликкер-шума.

б) $\alpha \neq 0, \beta = 0$. В этом случае для одно- и L -мерной характеристических функций получим выражения:

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{\nu \lambda^2}{E^2} \left(\frac{A^2}{1-2\alpha} (t^{1-2\alpha} - \delta t^{1-2\alpha}) + \frac{1}{2} \frac{A}{\delta t^\alpha} + \frac{1}{2} \delta(0) \right) \right], \quad (139)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{\nu}{E^2} \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L \lambda_k \lambda_l f(t_k, t_l) \right], \quad (140)$$

где функция $f(t_k, t_l)$ имеет вид:

– при $\alpha = 1$:

$$f(t_k, t_l) = \frac{A^2}{t_l - t_k} \ln \left(\frac{t_k(t_l - t_k + \delta t)}{t_l \delta t} \right) + \frac{1}{2} \frac{A}{(t_l - t_k)^\alpha} + \frac{1}{2} \delta(t_l - t_k), \quad (141)$$

– при $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$f(t_k, t_l) = 2A^2 \ln \left(\frac{\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}} \right) + \frac{1}{2} \frac{A}{(t_l - t_k)^\alpha} + \frac{1}{2} \delta(t_l - t_k). \quad (142)$$

Выражение (140) позволяет найти корреляционную функцию процесса $\varepsilon_c(t)$ согласно определению [9]:

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{\partial(i\lambda_1) \partial(i\lambda_2)} \Big|_{\lambda_1, \lambda_2=0}. \quad (143)$$

Формула (143) в свою очередь дает возможность определения одно-сторонней спектральной плотности процесса $\varepsilon_c(t)$

$$\tilde{G}_\varepsilon(\omega) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(4 \int_0^{t-\delta t} \rho(t-\tau, t) \cos \omega \tau d\tau \right), \quad (144)$$

Из (140), (143) и (144) находим:

1) при $\alpha = 1$:

$$\tilde{G}_\varepsilon(\omega, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{8v}{E^2} \int_0^{t-\delta t} \left(\frac{A^2}{\tau} \ln \frac{(t-\tau)(t+\delta t)}{t\delta t} + \frac{1}{2} \frac{A}{\tau} + \delta(\tau) \right) \cos \omega \tau d\tau \right]. \quad (145)$$

Так как слагаемое $\frac{A^2}{\tau} \ln \frac{(t-\tau)(t+\delta t)}{t\delta t}$ очень быстро убывает с ростом τ , то основной вклад в значение интеграла (145) при больших t дает интегрирование по тем τ , для которых выполняется условие $\tau \ll t$. Но в этом случае

$$\frac{(t-\tau)(t+\delta t)}{t\delta t} \approx 1 + \frac{\tau}{\delta t}.$$

Тогда интегрирование (144) при больших t окончательно дает (формула (2) п. 2.6.33 в [13]):

$$\tilde{G}_\varepsilon(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{4v}{E^2} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[A^2 (\text{si}^2(\omega \delta t) + \text{ci}^2(\omega \delta t)) - A \text{ci}(\delta t) + \frac{1}{2} \right], \quad (146)$$

где $\text{si}(x)$ и $\text{ci}(x)$ – интегральные синус и косинус. В пределе $\omega \rightarrow 0$ значение выражения (146) неограниченно возрастает, в случае, когда $\omega \rightarrow \infty$, спектральная плотность (146) стремится к постоянной величине, равной

$$\tilde{G}_\varepsilon(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{2v}{E^2} \left(1 + \frac{\pi^2 A^2}{2} \right).$$

2) при $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\tilde{G}_\varepsilon(\omega, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{4v}{E^2} \int_0^{t-\delta t} \left(2A^2 \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\tau + \delta t} + \sqrt{\delta t}} + \frac{A}{\sqrt{\tau}} + \delta(\tau) \right) \cos \omega \tau d\tau \right]. \quad (147)$$

Здесь, как и ранее, при больших t основной вклад в окончательный результат вносит интегрирование по тем τ , для которых $\tau \ll t$. При таком условии имеет место приближенное равенство

$$\left(\frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\tau + \delta t} + \sqrt{\delta t}} \right)^4 \approx 1 + \frac{(2t)^2}{\tau^2},$$

и интегрирование (147) дает (формулы (11) п. 2.6.33 и (11) п. 2.5.3 в [13]) при больших t :

$$\tilde{G}_\varepsilon(\omega, t) = \frac{4\nu}{E^2} \left[\frac{\pi A^2}{2\omega} (1 - e^{-2\omega t}) + A \sqrt{\frac{\pi}{4t}} + 1 \right]. \quad (148)$$

При $t \rightarrow \infty$ формула (148) переходит в выражение

$$\tilde{G}_\varepsilon(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{4\nu}{E^2} \left(\frac{\pi A^2}{2\omega} + 1 \right). \quad (149)$$

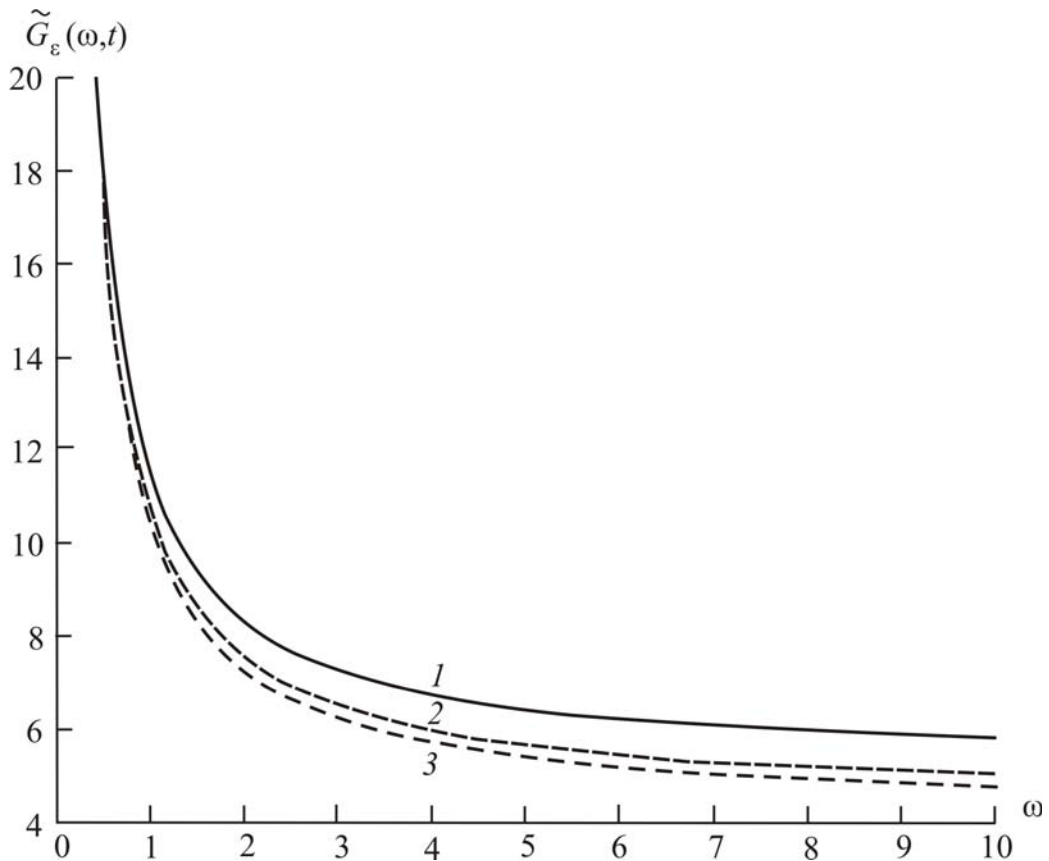


Рис. 10. Графики спектральной плотности $G_\varepsilon(\omega)$, задаваемые формулой (148) при $t = 10$ с (1), $\beta = 100$ с (2), $\beta = 1000$ с (3).

График функции, определяемой соотношением (148), приведен на рис. 10 для разных t . Из (148) и (149) хорошо видно, что при малых частотах ω односторонняя спектральная плотность $\tilde{G}_\varepsilon(\omega)$ носит характер фликкер-шума.

Заметим, что спектральная плотность случайного процесса $\varepsilon_c(t)$ при $\beta = 0$ для $t \rightarrow \infty$ может быть найдена по формуле (135) с использованием преобразования Лапласа.

В случае, когда $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$, возможно лишь численное нахождение статистических характеристик случайного процесса (132). На рис. 11 изображены графики спектральной плотности для $\alpha = \frac{2}{3}$, построенные путем численного расчета.

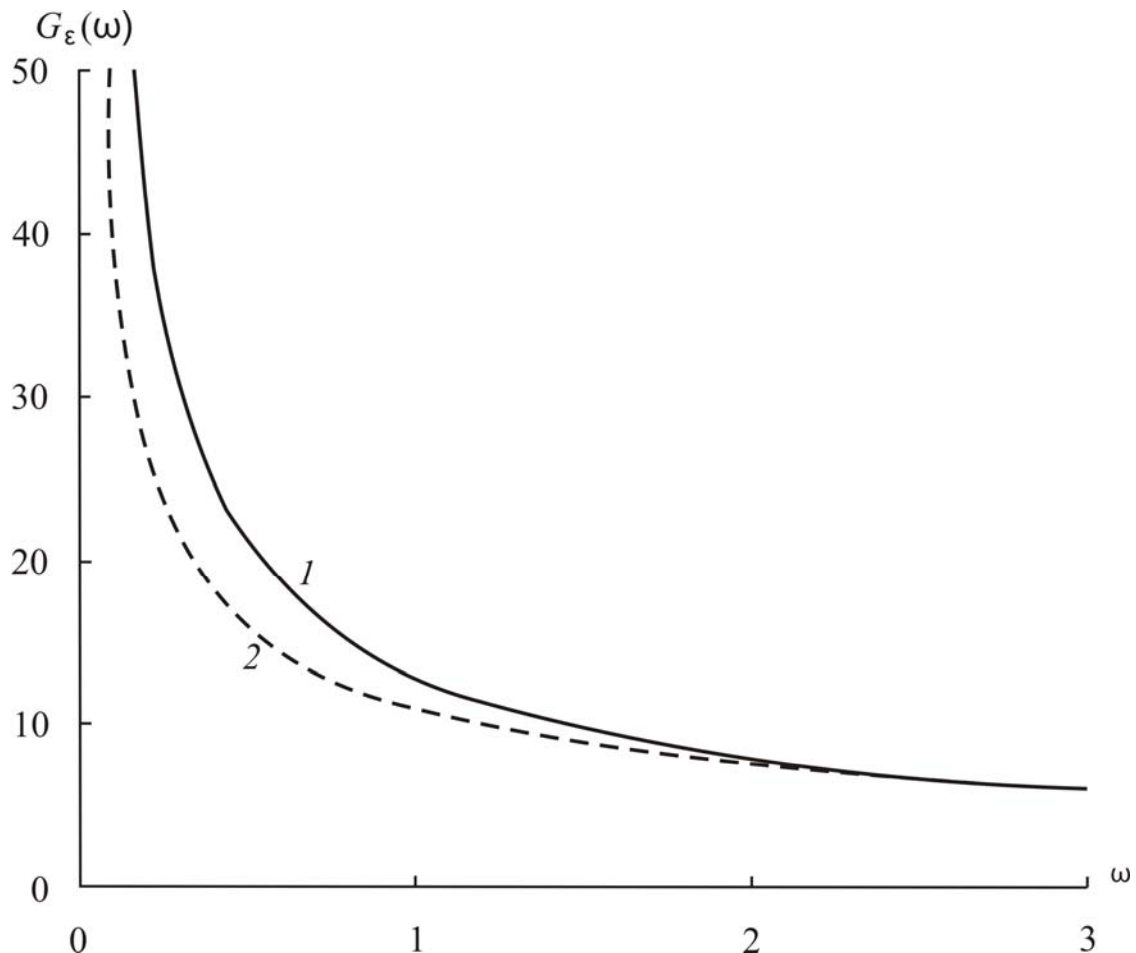


Рис. 11. Графики спектральной плотности процесса (132), построенные численными методами для $\beta = 0 \text{ с}^{-1}$, $\alpha = \frac{2}{3}$ при $t = 10 \text{ с}$ (1), $t = 100 \text{ с}$ (2).

Сравним полученные спектральные плотности $G_\varepsilon(\omega)$ со спектральными плотностями флуктуаций деформации среды $\varepsilon(t)$ в том случае, если среда описывается с помощью модели Фойхта–Кельвина (121) (или (122)).

Из (122) для спектральной плотности флуктуаций деформаций $G_\varepsilon^{\Phi K}(\omega)$ на границе среды из материала Фойхта–Кельвина при наличии

случайной нагрузки $\xi_{\sigma}(t)$ (белого шума с интенсивностью ν) легко получить

$$G_{\varepsilon}^{\Phi K}(\omega) = \frac{\nu}{\eta^2 \omega^2 + E^2}. \quad (150)$$

Заметим, что полученный вид спектральной плотности $G_{\varepsilon}^{\Phi K}(\omega)$ по своему характеру совпадает со спектральной плотностью скорости броуновской частицы при классическом рассмотрении [8]. При стремлении частоты к нулю ($\omega \rightarrow 0$), спектральная плотность $G_{\varepsilon}^{\Phi K}(\omega)$ стремится к постоянной величине

$$G_{\varepsilon}^{\Phi K}(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{\nu}{E^2}. \quad (151)$$

На рис. 12 в сравнении приведены графики спектральных плотностей, которые задаются формулой (150), получаемой при использовании модели Фойхта–Кельвина, и формулой (138), полученной при использовании интегральной модели с ядром Ржаницына (параметры η , E , β , A считаются единичными, а интенсивность белого шума для случая модели Фоккера–Планка в семь раз больше аналогичной интенсивности для модели, описываемой интегральным оператором). Отметим значительное качественное отличие указанных графиков. В частности, график, построенный по формуле (150) стремится асимптотически к оси абсцисс при $\omega \rightarrow \infty$. В то же время, график, соответствующий выражению (138) стремится к $\frac{\nu}{E^2}$ при $\omega \rightarrow \infty$.

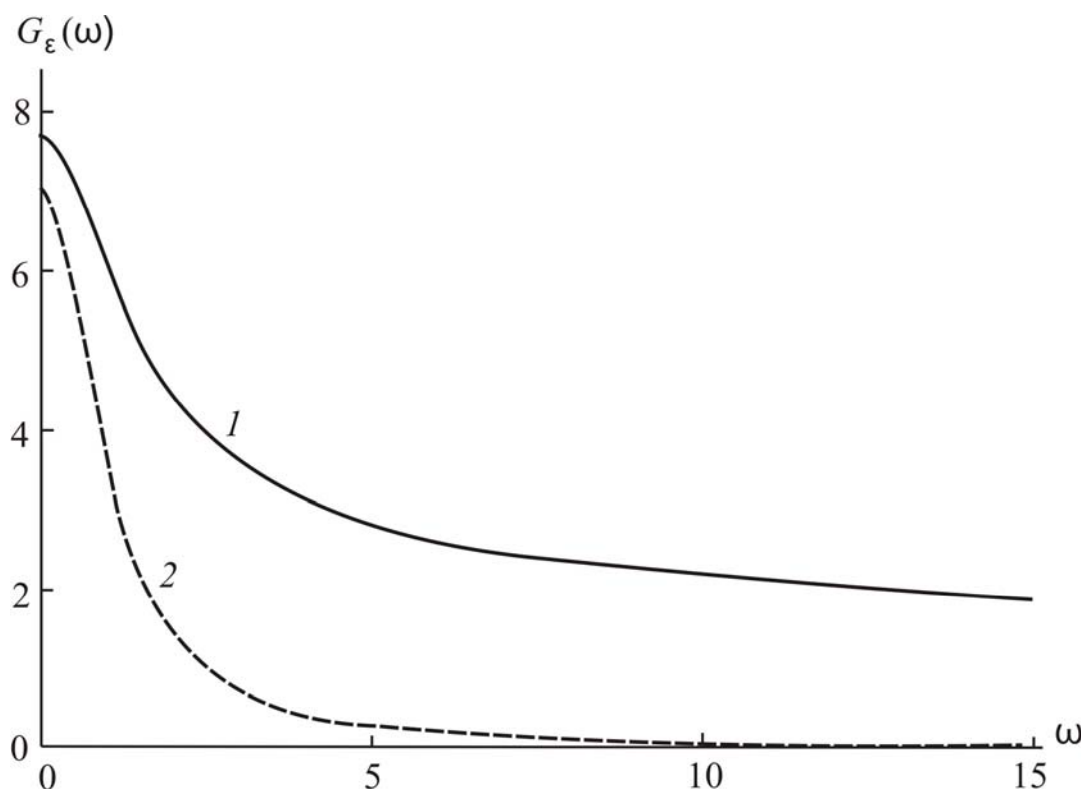


Рис. 12. Графики спектральной плотности $G_\varepsilon(\omega)$, построенные по формулам (138) (кривая 1) и (150) (кривая 2).

Заключение. Проведенное описание одномерного броуновского движения и броуновского движения сферической частицы в неограниченной вязкой среде как случайных процессов, носящих немарковский характер, показывает их значительное отличие от аналогичных процессов, исследуемых классическими методами. Полученные результаты могут иметь значение при рассмотрении случайных процессов различной природы, для анализа которых используется модель броуновского движения. При исследовании реологических процессов в неклассических средах так же возникает задача разработки методов описания этих процессов как немарковских.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 332 с.

2. Морозов А.Н. Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения. – ЖЭТФ. – 1996. – Том. 109, вып. 4. – С. 1304 – 1315.
3. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. – М.:Наука, 1986. – 480 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с.
5. Голяницкий И.А. Оптимальная пространственно-временная негауссовых полей и процессов. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 208 с.
6. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. Новое в исследованиях 1/f-шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141., вып. 1. – С. 151 – 176.
7. Букингом М. Шумы в электронных приборах и системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 399 с.
8. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.:Наука, 1982. – 608 с.
9. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. - М.: Наука, 1990. – 632 с.
10. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.:Мир, 1986. – 528 с.
11. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. – М.:Мир, 1987. – 400 с.
12. Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ, Естественные науки. 2004. №3. – С. 47 – 56.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.:Наука, 1981. – 800 с.
14. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.:Наука, 1984. – 344 с.

15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986. – 736 с.
16. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Применение уравнения Вольтерра второго рода для описания вязкого трения и теплопроводности // Вестник МГТУ, Естественные науки. – 2006. – № 3. – С. 62 – 71.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
18. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Внутреннее трение в одномерных упругих системах как результат рассеяния волн на случайных неоднородностях среды // Испытания материалов и конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во «Интелсервис», 1996. – С. 147-150.
19. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 208 с.
20. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
21. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. – М.: Машиностроение, 1978. – 560 с.
22. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Движение сферической броуновской частицы в вязкой среде как немарковский процесс // Вестник МГТУ, Естественные науки. – 2006. – № 4. – С. 3–15.
23. Реология: Теория и приложения. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 824 с.
24. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Изд-во литературы по строительству. 1968. – 415 с.
25. Ишлинский А.Ю. Работы по прикладной механике. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М.: Наука, 1986. – 359 с.
26. H.A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters. An Introduction to Rheology. – Amsterdam: Elsevier Science, 1989. – 210 p.