

УДК 519.62

*А.Н. МОРОЗОВ, А.В. СКРИПКИН***ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ДЛЯ ОПИСАНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ
КАК НЕМАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА**

Проведено описание одномерного броуновского движения и броуновского движения шарообразной частицы в неограниченной среде как традиционными методами, так и с использованием интегральных преобразований, учитывающих увлечение броуновской частицей окружающих ее частиц среды. Показано, что флуктуации скорости броуновской частицы являются немарковским случайным процессом. В рамках используемой модели рассмотрен также гармонический осциллятор, находящийся в вязкой среде. Показано, что при использовании реологических моделей случайные динамические процессы также носят немарковский характер.

Ключевые слова: броуновское движение, осциллятор, немарковский процесс, реологические модели.

Применение теории марковских процессов при описании броуновского движения в реальных физических средах является приближенным, не учитывающим особенности взаимодействия броуновской частицы и частиц среды [1, 2]. Отметим, что и процессы, происходящие в физических и технических системах, зачастую также не подпадают под разряд марковских процессов [3 – 5]. В частности, примером немарковского процесса может служить фликкер-шум, наблюдаемый в процессах, имеющих различную физическую природу [6]. Экспериментально наблюдаемые флуктуации кинетических коэффициентов (например, флуктуации коэффициента электропроводности) имеют спектральную плотность, характерную для фликкер-шума. Фликкер-шум является основным типом шума, ограничивающего чувствительность электронных приборов в низкочастотной части спектра [7]. К классу немарковских процессов относятся реальные радиотехнические сигналы при их амплитудной и фазовой модуляции совокупностью детерминированных и случайных процессов [5].

Отметим также, что при воздействии марковского случайного процесса на динамическую систему её отклик представляет собой немарковский случайный процесс. Сумма двух марковских процессов представляет собой немарковский процесс. Немарковскими будут также процессы, образованные при интегрировании марковского или нахождении скользящего среднего от процесса с независимыми значениями [4]. В частности, координата броуновской частицы, вычисляемая как интеграл от её скорости, в общем случае не описывается моделью марковского случайного процесса. Винеровское приближение для броуновской частицы справедливо только на достаточно больших промежутках времени, существенно больших времени релаксации частицы.

Указанные соображения показывают, что при описании и анализе реальных физических процессов и технических устройств практически всегда приходится иметь дело с немарковскими случайными процессами, а модель марковского процесса может рассматриваться только как первое приближение.

Броуновское движение как марковский процесс

При описании броуновского движения обычно используется подход, основанный на применении стохастического уравнения Ланжевена [1, 8]. Указанный подход позволяет воспользоваться хорошо разработанной теорией стохастических дифференциальных систем [9, 10], с помощью которой можно определять все необходимые статистические характеристики флуктуаций скорости движения броуновской частицы.

Рассмотрим движение шарообразной броуновской частицы радиуса R и массы M в среде (жидкости или газе) с кинематической вязкостью ν и плотностью ρ . Уравнение движения такой частицы имеет вид

$$M \frac{dV(t)}{dt} = F_0(t) + F_c(t) + \xi_V(t), \quad (1)$$

где $V(t)$ – скорость частицы; $F_c(t)$ – сила сопротивления; $F_0(t)$ – сумма остальных внешних заданных сил; $\xi_V(t)$ – случайная сила. Силу сопротивления $F_c(t) = F_{c0}(t)$ для линейной вязкой среды обычно записывают в виде

$$F_{c0}(t) = -\gamma V(t), \tag{2}$$

где γ – коэффициент вязкого трения, который для шарообразной частицы равен $\gamma = 6\pi\eta R$. Для спектральной плотности флуктуаций скорости частицы $V(t)$ можно записать [8]

$$G_V(\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2 + \beta^2}, \tag{3}$$

где $\alpha = 2\gamma kT/M$; $\beta = \gamma/M$; k – постоянная Больцмана; T – температура вязкой жидкости, в которой находится броуновская частица. Для низких частот спектральная плотность $G_V(\omega)$ стремится к постоянной величине

$$G_V(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2MkT}{\gamma}. \tag{4}$$

Если случайный процесс $\xi_V(t)$ представляет собой производную от процесса с независимыми приращениями, то скорость $V(t)$ броуновской частицы описывается марковским случайным процессом, что позволяет определить для неё любые L -мерные характеристические функции, а следовательно, и любые многомерные функции распределения [9].

Отметим, что описанный подход может быть использован и при решении задачи определения флуктуаций температуры тела, находящегося в тепловом контакте с термостатом, если тепловой поток от него пропорционален разности температур тела и термостата.

Одномерный случай броуновского движения

Рассмотренная выше простейшая модель броуновского движения применима только в том случае, если сила вязкого трения в среде может быть записана в виде (2). Но в реальном случае, кроме непосредственного соударения броуновской частицы с находящимися в близости от неё частицами среды, наблюдается увлечение частиц среды, расположенных на расстоянии от броуновской частицы [10]. Это приводит к существенному изменению характера вязкого трения, и соотношение (2) становится несправедливым.

Учет увлечения вязкой жидкости движущимся телом приводит к необходимости использования для описания движения интегральных уравнений, что, в свою очередь, делает необходимым применение теории немарковских процессов [11]. Покажем, что даже в простейшем случае одномерного броуновского движения в безграничной среде неприменимо его описание как марковского процесса [12].

Рассмотрим движение плоской поверхности в вязкой жидкости, занимающей полупространство ($x > 0$). Будем считать, что плоскость расположена в начале координат (при $x = 0$), а её движение со скоростью $V(t)$ происходит в направлении, перпендикулярном оси X и лежащем в плоскости (рис. 1). На плоскость действуют сила вязкого трения $F_c(t)$ со стороны среды и случайная сила $\xi_V(t)$ (на единицу площади).

Движение плоскости в вязкой жидкости будет описываться уравнением (1) (где масса M считается отнесенной на единицу площади), а вместо соотношения (2) необходимо применять формулу для силы вязкого трения, действующей со стороны жидкости:

$$F_c(t) = \eta \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \tag{5}$$

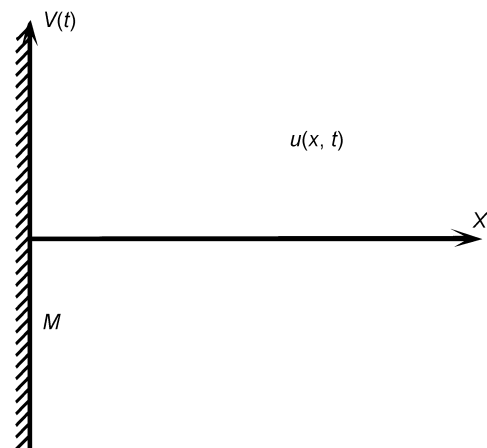


Рис. 1. Движение плоскости в вязкой жидкости

где $\eta = \nu\rho$ – вязкость жидкости; $u(x, t)$ – скорость течения жидкости, направленная в каждой точке параллельно скорости плоскости $V(t)$. Считаем детерминированную силу $F_0(t) = 0$.

В рассматриваемом одномерном случае, считая скорость жидкости малой, уравнение для $u(x, t)$ при $x > 0$ принимает вид [10, §24]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$u(x, 0) = 0; \quad (7)$$

$$u(0, t) = V(t). \quad (8)$$

Тогда решение уравнения (6) с учетом условий (7) и (8) приобретает вид [13]

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] V(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Найдем производную выражения (9) по координате x :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2x^2}{4\nu(t-\tau)^{5/2}} \right] \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] V(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Вычисление интеграла (10) по частям дает

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (11)$$

Подстановка выражения (11) в формулу (5) позволяет определить зависимость силы $F_c(t)$ от скорости $V(t)$:

$$F_c(t) = -\frac{\eta}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (12)$$

Эта формула для рассматриваемого случая заменяет выражение (2). Формула (12) получена другим способом в работе [10, §24].

Таким образом, описание флуктуаций скорости плоской поверхности в вязкой жидкости, заполняющей полупространство, сводится к решению системы уравнений (1) и (12). Так как уравнение (12) имеет вид интегрального уравнения, то случайный процесс $F_c(t)$, а следовательно, и процесс $V(t)$ представляют собой немарковские случайные процессы.

Отметим, что описание теплопроводности в одномерной безграничной среде сводится к выражению, аналогичному (12) [12]. При изучении внутреннего трения в одномерных упругих системах, которое считается результатом рассеяния волн на случайных неоднородностях среды, также возникают выражения, подобные (12) (см. [14, 15]).

Система уравнений (1) и (12) может быть записана в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода [16]

$$Z(t) + A \int_0^t Z(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \xi(t), \quad (13)$$

где

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad A = \frac{\eta}{M\sqrt{\pi\nu}}, \quad \xi(t) = \frac{\xi_V(t)}{M}. \quad (14)$$

Очевидно, что процесс $Z(t)$, являющийся решением интегрального уравнения (13), представляет собой немарковский случайный процесс.

Решение интегрального уравнения (13) имеет вид

$$Z(t) = \int_0^t (\delta(t-\tau) - R(t, \tau)) \xi(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где резольвента (см. [21, гл. VIII, §3])

$$R(t, \tau) = \frac{1}{t - \tau} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} r_k (t - \tau)^{\frac{k}{2}}, \quad r_k = \frac{A^k \pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}. \quad (16)$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Расчетный график функции $R(t - \tau)$ изображен на рис. 2. Видно, что с возрастанием разности $t - \tau$ наблюдается резкое уменьшение значения функции $R(t - \tau)$.

Используя метод описания немарковских случайных процессов, изложенный в [11], для одномерной и L -мерной характеристических функций случайного процесса $Z(t)$, задаваемого линейным интегральным соотношением (15), получим

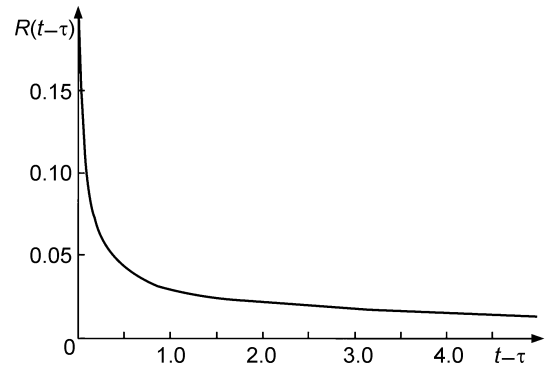


Рис. 2. График функции $R(t - \tau)$

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \left(r_1^2 \ln \frac{t}{\delta t} + \sum_{k=2}^{\infty} r_k^2 \frac{t^{k-1}}{k-1} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{m+n} r_m r_n \frac{t^{\frac{m+n-2}{2}}}{m+n-2} + r_2 + \delta(t) \right) \right]; \quad (17)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \left(\sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k (\delta(t_l - t_k) + R(t_l, t_k)) + \sum_{m,n=1}^{\infty} r_m r_n f_{mn} \right) \right], \quad (18)$$

где σ – интенсивность случайного процесса $\xi(t)$, распределение которого имеет вид кривой Гаусса; δt – малая положительная величина; $\delta(x)$ – дельта-функция;

$$f_{mn} = \begin{cases} 2 \ln \frac{\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}} & \text{при } m, n = 1, \\ \sum_{s=0}^{\frac{m-1}{2}} C_s^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{2-s-1} \frac{t_l^{\frac{s+n}{2}} - (t_l - t_k)^{\frac{m+n-1}{2}}}{\frac{n}{2} + s} & \text{при } m \text{ – четном,} \\ \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} C_s^{\frac{n-1}{2}} \frac{(t_l - t_k)^{\frac{n-s-1}{2}} t_k^{\frac{m+s}{2}}}{\frac{m}{2} + s} & \text{при } m \text{ – нечетном и } n \text{ – четном,} \\ t_l^{\frac{a+3}{2}} \sum_{s=1}^a \frac{(2a+1)(2a-1)\dots(2a-2s+3)(t_k - t_l)^s}{(a+b+2)(a+b+1)\dots(a+b-s+2)} t_k^{a-s+\frac{1}{2}} - \\ - \sum_{s=0}^b \frac{(2a+1)(2a-1)\dots(2a-2s+3)}{2^s (a+b+2)(a+b+1)\dots(b-s+1)} \frac{(t_k - t_l)^{a+s+1} a!! \sqrt{t_k}}{2^{a+1}} + \\ + \frac{a!! b!! (t_k - t_l)^{a+b+2}}{(a+b+2)! 2^{a+b+2} (-1)^{b+1}} 2 \ln \frac{\sqrt{t_k} + \sqrt{t_l}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}} & \text{при других } m, n. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь C_a^b – соответствующий биномиальный коэффициент, $a = \frac{m-3}{2}$, $b = \frac{n-3}{2}$.

Полученные выражения (17) и (18) позволяют определить любые характеристики случайного процесса $Z(t)$. В частности, для корреляционной функции $\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle$ получим

$$\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle = \sigma \left(\delta(t_2 - t_1) + R(t_2, t_1) + \sum_{m,n=1}^{\infty} r_m r_n f_{mn} \right), \quad (20)$$

где функция f_{mn} определяется выражением (19), в котором сделана замена $t_k = t_1$, $t_l = t_2$. Последняя формула дает возможность рассчитать спектральную плотность случайного процесса $Z(t)$ согласно определению [9]

$$G_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle Z(t)Z(t-\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (21)$$

Преобразование Лапласа уравнения (13) позволяет записать его в изображениях

$$\hat{Z}(p) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + A\sqrt{\pi}} \hat{\xi}(p), \quad (22)$$

где $\hat{Z}(p)$ и $\hat{\xi}(p)$ – изображения функций $Z(t)$ и $\xi(t)$ соответственно.

Так как спектральная плотность процесса $\xi(t)$ постоянна и равна его интенсивности

$$G_\xi = \sigma, \quad (23)$$

то в соответствии с формулой (22) спектральная плотность процесса $Z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ принимает вид

$$G_Z(\omega) = \left| \frac{\sqrt{i\omega}}{\sqrt{i\omega} + A\sqrt{\pi}} \right|^2 \sigma \quad (24)$$

или

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega\sigma}{\omega + A\sqrt{2\pi\omega} + \pi A^2}. \quad (25)$$

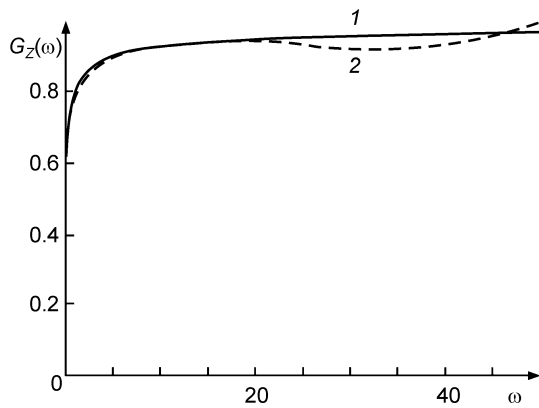


Рис. 3. Графики спектральных плотностей $G_Z(\omega)$, определенных по формуле (25) (кр. 1) и при численном расчете (кр. 2)

На рис. 3 показаны в сравнении графики спектральных плотностей для $A = 0,1 \text{ с}^{-1/2}$ при численном расчете с помощью формул (20) и (21) (при $t = 10^5 \text{ с}$) и задаваемой формулой (25). Видно, что наблюдается хорошее совпадение результатов, получаемых разными методами. Расхождение при больших частотах связано, видимо, с ограниченным числом членов бесконечного ряда в (16), используемого при численном расчете.

Полученное выражение (25) с учетом формул (14) позволяет определить спектральную плотность флуктуаций скорости $V(t)$:

$$G_V(\omega) = \frac{\sigma}{\omega(\omega + A\sqrt{2\pi\omega} + \pi A^2)}, \quad (26)$$

где

$$\sigma = \frac{2\gamma kT}{M^2}. \quad (27)$$

Для малых частот при условии $\omega \ll A^2$ формула (26) приобретает вид

$$G_V(\omega) \Big|_{\omega \ll A^2} = \frac{\sigma}{\pi A^2 \omega}, \quad (28)$$

или, с учетом формул (14) и (27),

$$G_V(\omega) \Big|_{\omega \ll A^2} = \frac{2\gamma kT}{\eta\rho\omega}. \quad (29)$$

Из выражения (29) следует, что флуктуации скорости движения $V(t)$ плоской поверхности в вязкой жидкости представляют собой фликкер-шум [6], для которого характерна обратная зависимость от частоты для диапазона малых частот.

На рис. 4 приведены зависимости спектральных плотностей $G_V(\omega)$, рассчитанные по формулам (3) и (26). Хорошо видно, что для больших частот характер этих двух зависимостей аналогичен, а при малых — наблюдается существенное отличие, связанное с наличием фликкер-шума в случае, описываемом формулой (26).

Отметим, что флуктуации температуры плоской поверхности в задаче о одномерной теплопроводности также имеют спектральную плотность вида (26), а следовательно, для них характерно

наличие фликкер-шума. Это, в свою очередь, с учетом зависимости кинетических коэффициентов от температуры должно приводить к флуктуациям указанных коэффициентов в низкочастотной области спектра со спектральной плотностью, имеющей вид фликкер-шума.

Таким образом, при рассмотрении простой модельной задачи одномерного броуновского движения установлено, что флуктуации скорости движения $V(t)$ представляют собой немарковский случайный процесс с характерной особенностью типа фликкер-шум в низкочастотной части спектра.

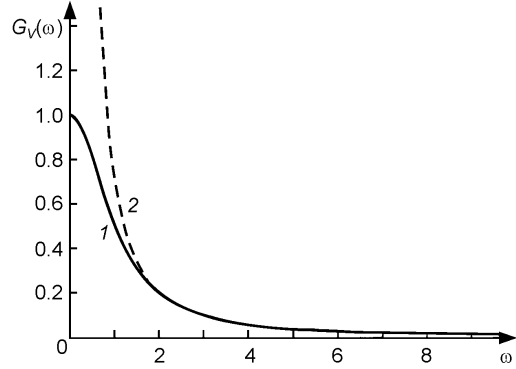


Рис. 4. Графики спектральных плотностей $G_V(\omega)$, рассчитанных по формулам (3) (кр. 1) и (26) (кр. 2)

Броуновское движение шарообразной частицы в неограниченной среде при наличии возвращающей силы

При описании броуновского движения шарообразной частицы с учетом увлечения частиц среды вместо формулы (2) необходимо использовать выражение [10, §24, задача 7]

$$F_c(t) = -2\pi\rho R^3 \left[\frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (30)$$

В последнем выражении момент времени $t=0$ принят за начало движения частицы. Формула (30) получается путем нахождения силы сопротивления, испытываемой сферической частицей, совершающей гармонические колебания в вязкой жидкости (при малых числах Рейнольдса), с последующим использованием этого решения для нахождения силы сопротивления, действующей на частицу, совершающей произвольное движение со скоростью $V(t)$, разлагаемой в интеграл Фурье.

Подставляя (30) в (1), получим уравнение движения броуновской сферической частицы

$$\left(M + \frac{2}{3} \pi\rho R^3 \right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi\rho\nu R V(t) + 6\pi R^2 \sqrt{\pi\nu} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F_0(t) + \xi_V(t). \quad (31)$$

В работе [17] показано, что в этом случае флуктуации скорости и координаты броуновской частицы представляют собой немарковский случайный процесс, а их статистические характеристики отличаются от аналогичных характеристик классической броуновской частицы. В частности, для спектральной плотности флуктуаций скорости в [17] получено выражение

$$G_V(\omega) = \frac{G_\xi}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2 B^2 \pi\omega + A^2 B\sqrt{2\pi\omega} + A^2}, \quad (32)$$

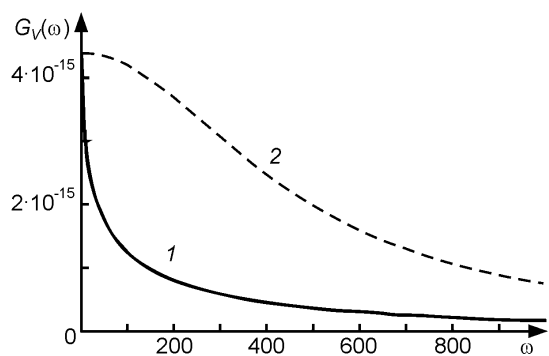


Рис. 5. Графики спектральных плотностей, задаваемых формулами (3) (кр. 2) и (32) (кр. 1) при $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $R = 10^{-4} \text{ м}$, $M = 4 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$, $T = 300 \text{ К}$

где
$$A = \frac{6\pi\rho\nu R}{M + \frac{2}{3} \pi\rho R^3}, \quad B = R\sqrt{\frac{1}{\pi\nu}}; \quad (33)$$

$$G_\xi = \frac{12\pi\rho\nu R k T}{\left(M + \frac{2}{3} \pi\rho R^3 \right)^2}. \quad (34)$$

Сравнение формул (3) и (32) показывает, что использование для силы сопротивления выражения (30) вместо (2) приводит к существенному различию спектральных плотностей флуктуаций скорости частицы, в особенности в полосе низких и средних частот. На рис. 5 показаны в сравнении графики спектральных плотностей, даваемые формулами (3) и (32).

Пусть теперь на сферическую частицу вдоль оси X кроме случайной силы и силы сопротивления действует возвращающая сила. В этом случае уравнение (31) примет вид

$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}} \right) Z(\tau) d\tau = -\tilde{k}X(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (35)$$

где

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad \tilde{\xi}(t) = \frac{\xi_V(t)}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}. \quad (36)$$

Выполнив процедуру, проведенную при выводе формулы (26), для спектральных плотностей процессов $Z(t)$ и $V(t)$ получим

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^4}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\xi}; \quad (37)$$

$$G_V(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\xi}. \quad (38)$$

Из (38) легко найти спектральную плотность для координаты $X(t)$. Получим

$$G_X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\xi}. \quad (39)$$

Сравним последнее выражение со спектральной плотностью классического осциллятора, которая получается из (39) при условии, что $B = 0$ с^{1/2}, а в формулах (33) и (34) слагаемое $\frac{2}{3}\pi\rho R^3$, стоящее в знаменателе, обращается в нуль. В этом случае (39) переходит в формулу

$$G_X^{кл}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + (A'^2 - 2k')\omega^2 + k'^2} G'_{\xi}, \quad (40)$$

где теперь $A' = \frac{6\pi\rho\nu R}{M}$, $k' = \frac{k}{M}$, а величина спектральной плотности шума принимает значение

$$G'_{\xi} = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{M^2}.$$

На рис. 6 и 7 показаны спектральные плотности, задаваемые выражениями (39) и (40), при следующих значениях параметров: $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 10^3$ кг/м³, $k = 10^{-2}$ Н/м, $R = 10$ мкм (рис. 6), $R = 100$ мкм (рис. 7). Плотность частицы при этом принимается равной плотности среды.

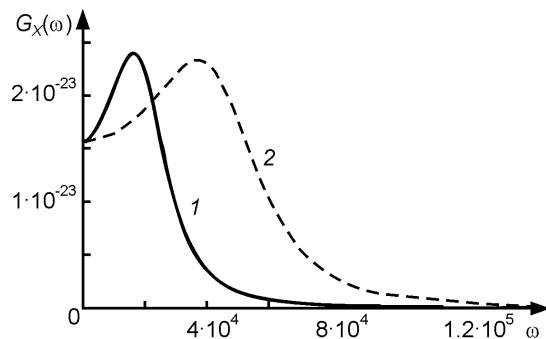


Рис. 6. Графики спектральных плотностей, задаваемых выражениями (39) (кр. 1) и (40) (кр. 2) при $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 10^3$ кг/м³, $k = 10^{-2}$ Н/м, $R = 10$ мкм

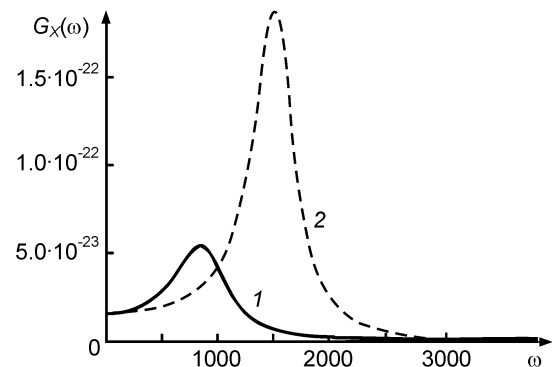


Рис. 7. Графики спектральных плотностей, задаваемых выражениями (39) (кр. 1) и (40) (кр. 2) при $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 10^3$ кг/м³, $k = 10^{-2}$ Н/м, $R = 100$ мкм

Из графиков видно, что с увеличением размера частиц формы кривых становятся похожими, при этом классическому случаю соответствует большее амплитудное значение спектральной плотности. Этот эффект становится наиболее заметным при больших размерах частиц. Из графика

ков видно также, что максимум спектральной плотности в классическом случае соответствует более высокой резонансной частоте. Этот факт является следствием того, что при неклассическом описании к массе частицы добавляется некоторая «эффективная» масса $\frac{2}{3}\pi\rho R$.

Таким образом, проведенное описание движения броуновской частицы шарообразной формы в неограниченной вязкой среде позволило установить, что флуктуации её скорости представляют собой немарковский случайный процесс. Полученные резонансные кривые для механического осциллятора, размещенного в вязкой безграничной среде, по своей форме отличаются от классических. Последний результат может иметь существенное значение для устройств демпфирования колебаний.

Реологические модели

При рассмотрении физических процессов в реологических средах связи между описывающими их величинами выражают обычно в виде соответствующих дифференциальных уравнений. Однако в тех случаях, когда временные масштабы происходящих в реологической среде динамических изменений меньше или сравнимы с временами релаксации среды, такое описание оказывается слишком грубым [18]. Это имеет место, в частности, при движении броуновской частицы в реологической среде или в случае короткопериодных внешних воздействий, оказываемых на нее. Одним из подходов, используемых при рассмотрении таких и подобных им задач, является описание связей между соответствующими физическими величинами в виде интегральных операторов. Например, связь между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ реологического материала при линейной деформации может быть выражена интегральными операторами Вольтерра второго рода [16]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right); \quad (41)$$

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right). \quad (42)$$

Здесь $K(t-\tau)$ – ядро ползучести; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации; E – мгновенный модуль упругости. В выражениях (41) и (42) принято, что напряжения и деформации отсутствуют при $t < 0$. Соотношение (42) является решением уравнения (41), вследствие чего между ядрами ползучести $K(t-\tau)$ и релаксации $R(t-\tau)$ имеется связь [16]. Конкретный характер поведения кривых, соответствующих ядрам ползучести и релаксации, определяется обычно опытным путем. Наиболее часто экспериментальные кривые для ядра ползучести аппроксимируются выражением вида [19]

$$K(t-\tau) = \frac{A}{(t-\tau)^\alpha}, \quad (43)$$

где A и α – постоянные, $0 < \alpha \leq 1$. Такие ядра применяют, например, при описании расплавов металлов, растворов полимеров и др.

Как показано в [20], интегральное уравнение движения системы с одной степенью свободы под действием переменной силы $f(t)$ в среде, подчиняющейся закону наследственной вязкоупругости, имеет вид

$$\ddot{q}(t) = -kq(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\varphi(q(\tau), \tau)d\tau + f(t), \quad (44)$$

где q – обобщенная координата; k – коэффициент упругости; $\Phi(t-\tau)$ – ядро, отражающее влияние наследственной вязкоупругости; $\varphi(y, \tau)$ – зависимость силы от обобщенной координаты, в общем случае нелинейная.

Применение последней формулы к движению броуновской частицы (роль обобщенной координаты играет в этом случае координата $X(t)$ с ядром влияния степенного вида, подобного (43), приводит к задаче, рассмотренной выше. Таким образом, движение броуновской частицы в реологических средах описывается с помощью интегральных операторов и так же, как и ранее, представляет собой немарковский процесс.

Проведенное описание одномерного броуновского движения и броуновского движения сферической частицы в неограниченной вязкой среде как случайных процессов, носящих немарковский характер, показывает их значительное отличие от аналогичных процессов, исследуемых классическими методами. Полученные результаты могут иметь значение при рассмотрении случайных процессов различной природы, для анализа которых используется модель броуновского движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.
2. Морозов А. Н. // ЖЭТФ. – 1996. – Т. 109. – Вып. 4. – С. 1304–1315.
3. Стратонович Р. Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. – М.: Наука, 1986. – 480 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с.
5. Голяницкий И. А. Оптимальная пространственно-временная обработка негауссовых полей и процессов. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 208 с.
6. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. // УФН. – 1983. – Т. 141. – Вып. 1. – С. 151–176.
7. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 399 с.
8. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
9. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
11. Морозов А. Н. // Вестник МГТУ. Естественные науки. – 2004. – № 3. – С. 47–56.
12. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. // Там же. – 2006. – № 3. – С. 62–71.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
14. Весницкий А. И., Метрикин А. В. // Испытания материалов и конструкций. – Н. Новгород: Изд-во «Интелсервис», 1996. – С. 147–150.
15. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
16. Волтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
17. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. // Вестник МГТУ. Естественные науки. – 2006. – № 4. – С. 3–15.
18. Реология: Теория и приложения. – М.: ИЛ, 1962. – 824 с.
19. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. – М.: Изд-во литературы по строительству, 1968. – 440 с.
20. Ишлинский А. Ю. Работы по прикладной механике. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
21. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. – М.: Машиностроение, 1978. – 560 с.

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия
E-mail: amor@mx.bmstu.ru

Поступила в редакцию 27.06.07,
после доработки – 25.03.08.