УДК 535.233

Тепловое излучение проводника с флуктуирующим током

А.Н. Морозов, А.В. Скрипкин

Рассматривается процесс теплового излучения цилиндрического тела, по которому протекает электрический ток, имеющий флуктуирующую составляющую (в виде белого или дробового шумов). Показано, что случайные изменения интенсивности излучения представляют собой немарковский процесс. Найдены статистические характеристики флуктуаций интенсивности излучения, в том числе характеристические функции и спектральные плотности.

PACS: 05.40.Ca, 44.40.+a
Ключевые слова: тепловое излучение, тепловой шум, дробовой шум, интенсивность, немарковский процесс.

Введение

Особенности теплового излучения проводника с током определяются, помимо свойств внешнего воздействия, характером протекающего в нем тока. Ввиду наличия флуктуирующей его составляющей (имеющей вид теплового белого шума, а также дробового шума, преобладающего при малых токах, или фликкер-шума, проявляющегося вследствие изменений коэффициента проводимости среды), возникают флуктуации интенсивности теплового излучения проводника.

В работе [1] показано, что тепловое излучение частицы, подверженной флуктуирующему внешнему тепловому воздействию со стороны других тел и окружающей среды, обладает наследственными свойствами и описывается стохастическими интегральными уравнениями. Очевидно, аналогичный вывод можно сделать и относительно поставленной в настоящей работе задачи. Получение законов теплового излучения проводника с флуктуирующим током потребует взамен хорошо разработанной теории стохастических дифференциальных систем [2] применения методов описания немарковских процессов, задаваемых интегральными операторами [3]. Заметим, кроме того, что более полное описание броуновского движения сферической частицы в вязкой среде [4], диффузии [5], теплопроводности [6] и других кинетических процессов также приводит к немарковскому характеру флуктуаций описывающих соответствующие задачи физических величин.

Целью данной работы является анализ процесса теплового излучения цилиндрического тела, по которому протекает электрический ток, имеющий флуктуирующую составляющую (в виде белого или дробового шумов).

Постановка задачи

Рассмотрим прямой цилиндрический проводник радиуса r, находящийся в безграничном пустом пространстве. Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) температура проводника равна нулю, ток в нем отсутствует.

Найдем выражение для интенсивности теплового излучения проводника $J(t)$, в котором при $t > 0$ течет ток силой $I(t)$. Для этого рассмотрим, прежде всего, случай, когда в проводнике долгое время тек постоянный ток I_0 и в момент времени $t = t_0$ был выключен. Определим, как изменяется интенсивность излучения проводника при $t > t_0$.

Будем считать проводник абсолютно черным телом. Тогда для указанного случая справедливо равенство:

$$-\frac{C_0}{2\pi r}\frac{dT(t)}{dt} = \sigma T^4(t), \qquad (1)$$

где C_0 — теплоемкость единицы длины проводника, $T(t)$ — его температура, σ — постоянная Стефана — Больцмана. Из соотношения (1) следует, что проводник при $t > t_0$ будет остывать по закону

$$T(t) = \frac{T_0}{\left(1+\alpha\left(t-t_0\right)\right)^{1/3}}, \qquad (2)$$

Морозов Андрей Николаевич, профессор, зав. кафедрой.
Скрипкин Алексей Владимирович, доцент,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.
Тел.: (499) 263–63–68, (499) 263–67–35
E-mail: amor@mx.bmstu.ru; skripkin@bmstu.ru

Статья поступила в редакцию 20 сентября 2013 г.

где введено обозначение

$$\alpha = \frac{6\sigma\pi r T_0^3}{C_0}, \tag{3}$$

а T_0 — температура, которой достиг проводник в момент времени t_0, определяемая из условия полного перехода выделяемого джоулева тепла в излучение:

$$I_0^2 R_0 = 2\pi r \sigma T_0^4. \tag{4}$$

Здесь R_0 — сопротивление единицы длины проводника при температуре T_0. В дальнейшем, ввиду малости флуктуаций тока по сравнению с величиной I_0 и, следовательно, малости соответствующих флуктуаций температуры проводника по сравнению с T_0, сопротивление R_0 будем считать не зависящим от времени.

Интенсивность теплового излучения $J(t)$ при $t > t_0$, как следует из формул (2) и (4), равна

$$J(t) = \frac{R_0}{2\pi r} \frac{I_0^2}{\left(1+\alpha\left(t-t_0\right)\right)^{4/3}}. \tag{5}$$

Найденное выражение (5), справедливое для случая остывающего проводника после выключения длительного постоянного тока I_0, позволяет найти соотношение для интенсивности $dJ(t)$ излучения в том случае, если нагрев проводника (с линейным сопротивлением R_0) был вызван действием кратковременного тока I_0 на малом интервале времени (τ; $\tau + d\tau$). Очевидно, для таких условий имеет место равенство:

$$dJ(t) = \frac{R_0}{2\pi r} \frac{d}{d\tau} \frac{I_0^2}{\left(1+\alpha\left(t-\tau\right)\right)^{4/3}} d\tau, \quad t > \tau. \tag{6}$$

Окончательно, интенсивность теплового излучения проводника, по которому течет произвольный ток $I(t)$, начиная с момента времени $t = 0$, определяется интегралом, получаемым из уравнения (6):

$$J(t) = \frac{2\alpha R_0}{3\pi r} \int_0^t \frac{I^2(t)}{\left(1+\alpha\left(t-\tau\right)\right)^{7/3}} d\tau. \tag{7}$$

Из полученного уравнения видно, что при наличии флуктуаций тока $I(t)$ соответствующие флуктуации интенсивности $J(t)$ теплового излучения проводника описываются нелинейным интегральным уравнением, не сводимым к конечной системе дифференциальных уравнений. Этот факт свидетельствует о немарковском характере случайных изменений интенсивности [7].

Будем далее считать, что ток $I(t)$ в проводнике представляется суммой двух слагаемых, а именно, постоянного тока I_0 и флуктуирующей составляющей $\delta I(t)$, причем $I_0 >> |\delta I(t)|$, что, как правило, всегда имеет место. Итак,

$$I(t) = I_0 + \delta I(t). \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в соотношение (7), получим

$$J(t) = J_0(t) + \delta J(t),$$

где детерминированная часть интенсивности теплового излучения проводника

$$J_0(t) = \frac{I_0^2 R_0}{2\pi r}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\alpha t\right)^{4/3}}\right)$$

стремится с течением времени к постоянной величине, определяемой условием (4), а случайная составляющая

$$\delta J(t) = \delta J_1(t) + \delta J_2(t),$$

обусловленная флуктуациями тока, состоит из двух слагаемых. Первое из них

$$\delta J_1(t) = \frac{4\alpha I_0 R_0}{3\pi r} \int_0^t \frac{\delta I(t)}{\left(1+\alpha\left(t-\tau\right)\right)^{7/3}} d\tau \tag{9}$$

вносит, очевидно, решающий вклад в дисперсию флуктуаций, в то время как второе

$$\delta J_2(2) = \frac{2\alpha R_0}{3\pi r} \int_0^t \frac{\delta I^2(t)}{\left(1+\alpha\left(t-\tau\right)\right)^{7/3}} d\tau \tag{10}$$

ответственно за среднее значение флуктуаций при больших t.

Характер флуктуаций тока $\delta I(t)$ определяется конкретными условиями задачи. Мы будем рассматривать случаи, когда ток испытывает тепловые флуктуации или изменения, соответствующие дробовому шуму.

Случай тепловых флуктуаций тока

Тепловые токовые шумы имеют место в проводниках и полупроводниках и обусловлены тепловым движением свободных электронов. Средний квадрат установившегося флуктуационного теплового тока $\langle \delta I^2 \rangle$ определяется известной формулой Найквиста [8]

$$\left\langle \delta I^2 \right\rangle = \frac{4 k_B T_0}{R_0 l} \Delta f,$$

где k_B — постоянная Больцмана, l — длина проводника, Δf — ширина спектра тепловых колебаний. Спектр мощности $G_{\delta I}(\omega)$ токовых флуктуаций в рассматриваемом случае не зависит от частоты (белый шум) и равен

$$G_{\delta I}(\omega) = \frac{4 k_B T_0}{R_0 l}. \tag{11}$$

Частотная ширина спектра Δf в реальных условиях ограничена некоторой максимальной частотой f_m, которую во многих случаях можно считать не зависящей от свойств проводника и определяемой его температурой [8]:

$$f_m = \frac{k_B T_0}{2\pi\hbar},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

Так как тепловые флуктуации тока представляют собой белый шум, то метод описания немарковских процессов, задаваемых линейными интегральными преобразованиями, разработанный в [3], позволяет получить все статистические характеристики функции $\delta I_1(t)$ (выражение (9)). В частности, для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ процесса $I_1(t)$ имеем

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[-\frac{1}{2}A\lambda^2\left(1-\frac{1}{(1+\alpha t)^{11/3}}\right)\right], \quad (12)$$

где $A = \dfrac{128 k_B \sigma T_0^4 I_0^2 R_0}{11\pi r l C_0}$.

Для математического ожидания $\langle \delta I_1(t)\rangle$ и дисперсии $D_{\delta J_1}(t)$ из соотношения (12) получим

$$\langle \delta J_1(t)\rangle = \left.\frac{\partial g_1(\lambda;t)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0,$$

$$D_{\delta J_1}(t) = \langle \delta J_1^2(t)\rangle - \langle \delta J_1(t)\rangle^2 =$$

$$= \langle \delta J_1^2(t)\rangle = -\frac{\partial^2 g_1(\lambda;t)}{\partial\lambda^2} = A\left(1-\frac{1}{(1+\alpha t)^{11/3}}\right).$$

Очевидно, $\langle \delta J^2(t)\rangle \approx \langle \delta J_1^2(t)\rangle$, поэтому

$$\langle \delta J^2(t)\rangle = A\left(1-\frac{1}{(1+\alpha t)^{11/3}}\right).$$

Среднее значение $\langle \delta J(t)\rangle$ флуктуаций интенсивности теплового излучения проводника определяется случайным изменением квадрата тока $\delta I^2(t)$ и для установившегося процесса ($t \to \infty$), как следует из выражения (10), стремится к постоянной величине

$$\left.\langle \delta J(t)\rangle\right|_{t\to\infty} = \frac{2R_0}{3\pi r}\langle \delta I^2(t)\rangle = \frac{4k_B^2 T_0^2}{3\pi^2 \hbar l r}. \quad (13)$$

Оценим найденные величины, рассматривая в качестве проводника медный цилиндр (удельная электропроводимость $\gamma = 58{,}1\cdot 10^6$ См·м$^{-1}$) длиной l = 1 см и радиусом r = 1 мм, по которому течет ток I_0 = 1 А. В этом случае R_0 = 0,55 Ом·м$^{-1}$, C_0 = 0,11 Дж·К·м$^{-1}$, T_0 = 350 K. Тогда A = = $2{,}2\cdot 10^{-13}$ Вт·м$^{-4}$, $\langle \delta J(t)\rangle|_{t\to\infty}$ = 0,03 Вт·м$^{-2}$, $\langle \delta J(t)\rangle / J_0(t)|_{t\to\infty} = 3{,}410^{-5}$.

Спектральная плотность $G_{\delta I}(\omega)$ мощности флуктуаций интенсивности установившегося теплового излучения проводника, примерно, равна аналогичной функции для мощности флуктуаций компоненты $\delta J_1(t)$. Для нахождения $G_{\delta I}(\omega)$ определим, прежде всего, преобразование Лапласа выражения (9). Получим [9]:

$$\delta\hat{J}_1(s) = \frac{4I_0R_0}{3\pi r}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{4/3} e^{s/\alpha}\Gamma(-4/3, s/\alpha)\delta\hat{I}(s), \quad (14)$$

где s — фурье-образ времени t, $\delta\hat{J}_1(s)$, $\delta\hat{I}(s)$ — образы функций $\delta J_1(t)$ и $\delta I(t)$ соответственно, $\Gamma(x, y)$ — дополнительная неполная гамма-функция, определяемая согласно [10]

$$\Gamma(x,y) = \int_y^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Из выражения (14), с учетом того, что спектральная плотность тепловых флуктуаций тока задается выражением (11), следует соотношение для плотности $G_{\delta I}(\omega)$:

$$G_{\delta J}(\omega) = \frac{64 k_B T_0 I_0^2 R_0}{9\pi^2 r^2 l}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{8/3}\Gamma^2(-4/3, \omega/\alpha). \quad (15)$$

При больших ω спектральная плотность $G_{\delta I}(\omega)$ стремится к нулю с помощью выражения

$$\left.G_{\delta J}(\omega)\right|_{\omega\to\infty} = \frac{64 k_B T_0 I_0^2 R_0}{9\pi^2 r^2 l}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{1/3}\exp\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

График функции $G_{\delta I}(\omega/\alpha)$, определяемый с помощью формулы (15), изображен на рис. 1 для указанного выше медного проводника при различных его радиусах.

Одномерная функция $f(\delta J; t)$ плотности вероятности распределения флуктуаций интенсивности $\delta J(t)$ может быть найдена путем обратного преобразования Фурье одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$, определяемой выражением (12). Получим

$$f(\delta J;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle \delta J^2(t)\rangle}}\exp\left(-\frac{\delta J^2}{2\langle \delta J^2(t)\rangle}\right). \quad (16)$$

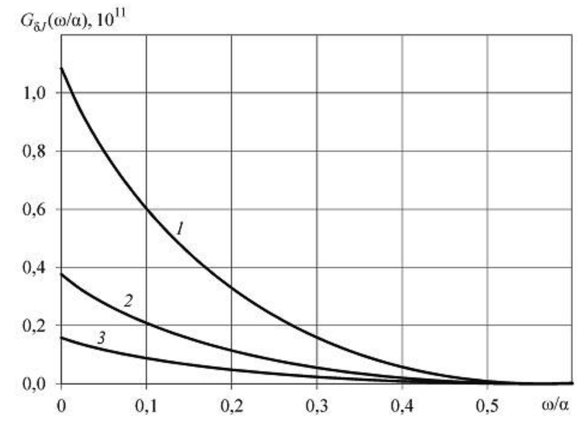

Рис. 1. График функции $G_{\delta I}(\omega/\alpha)$, определяемый с помощью формулы (15), при r = 1,00 мкм (кривая 1), r = 1,25 мкм (2), r = 1,50 мкм (3)

На рис. 2 представлены графики функции (16) для различных моментов времени t. Видно, что с течением времени график плотности вероятности флуктуаций $\delta J(t)$ «размазывается» по ширине, стремясь при $t \to \infty$ к стационарной гауссовой кривой, соответствующей установившемуся процессу излучения.

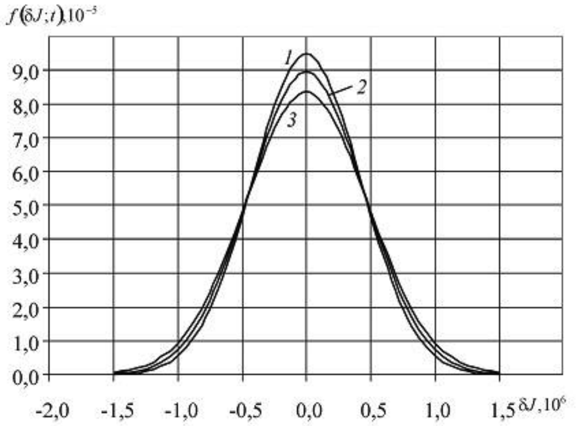

Рис. 2. Графики функции $f(\delta J;\ t)$, задаваемой выражением (16), при $t = 0{,}5\alpha^{-1}$ (кривая 1), $t = \alpha^{-1}$ (2), $t = \infty$ (3)

Таким образом, случайные изменения интенсивности теплового излучения проводника, обусловленные тепловыми флуктуациями тока в нем, являются в каждый момент времени гауссовыми, а после длительного протекания тока (несколько α^{-1}) статистические характеристики интенсивности излучения стремятся к своим стационарным значениям.

Случай дробовых флуктуаций тока

Флуктуации тока относятся к дробовому шуму в том случае, если становятся важны пролеты каждого отдельного электрона (дырки), рассматриваемые как независимые события. Дробовой шум дополняет тепловой, а в некоторых случаях становится преобладающим (в частности, при низких температурах проводника). Отметим, что протекание тока в полупроводниках, содержащих потенциальные барьеры (например, p—n-переходы), также сопровождается наличием дробового шума [11].

Среднее значение квадрата флуктуаций тока, обусловленных дробовым эффектом, определяется с помощью формулы Шоттки [8]

$$\left\langle \delta I^2(t) \right\rangle = 2eI_0\Delta f,$$

где e — модуль заряда электрона, Δf — как и ранее, ширина спектра колебаний тока, определяемая характерным временем пролета электрона (дырки) в проводнике. Спектральную плотность мощности дробовых флуктуаций тока можно считать постоянной и равной

$$G_{\delta I}(\omega) = 2eI_0.$$

Для нахождения статистических характеристик теплового излучения проводника учтем, что флуктуации тока в рассматриваемом случае описываются моделью пуассоновского процесса. Пользуясь методом [3], для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda;\ t)$ процесса $\delta J_1(t)$ получим

$$g_1(\lambda;t) = \\ = \exp\left[\frac{I_0}{e}\int_0^t \left(h\left(\frac{2\alpha R_0 \lambda}{3\pi r\left(1+\alpha(t-\tau)\right)^{7/3}}\right)-1\right)d\tau\right], \quad (17)$$

где характеристическая функция $h(\mu)$ распределения носителей тока по заряду, очевидно, равна

$$h(\mu) = \exp(ie\mu). \quad (18)$$

После подстановки (18) в выражение (17), находим

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[\frac{I_0}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{n!(7n/3-1)}\left(\frac{4iI_0R_0e\lambda}{3\pi r}\right)^n\left(1-\frac{1}{(1+\alpha t)^{7n/3-1}}\right)\right]. \quad (19)$$

Тогда для среднего значения $\langle \delta J_1(t)\rangle$ получим

$$\left\langle \delta J_1(t)\right\rangle = \frac{I_0^2R_0}{\pi r}\left(1-\frac{1}{(1+\alpha t)^{4/3}}\right).$$

Математическое ожидание флуктуаций установившегося теплового излучения проводника с током определится выражением

$$\left\langle \delta J(t)\right\rangle\Big|_{t\to\infty} = \left\langle \delta J_1(t)\right\rangle\Big|_{t\to\infty} + \left\langle \delta J_2(t)\right\rangle\Big|_{t\to\infty} = \\ = \frac{I_0R_0}{\pi r}\left(I_0 + \frac{4}{3}e\Delta f\right).$$

В первом приближении можно считать, что

$$\Delta f = \frac{I_0}{e}.$$

Тогда

$$\left\langle \delta J(t)\right\rangle\Big|_{t\to\infty} = \frac{7I_0^2R_0}{3\pi r}. \quad (20)$$

Из выражений (13) и (20) найдем отношение средних значений флуктуаций интенсивности теплового излучения, обусловленных тепловым и дробовым шумом. Учитывая условие (4), получим

$$\left.\frac{\left\langle \delta J(t)\right\rangle_{thermal}}{\left\langle \delta J(t)\right\rangle_{shot}}\right|_{t\to\infty} = \frac{7\pi^2\hbar\sigma rl}{2k_B^2}T_0^2 .$$

Как и следовало ожидать, вклад дробового шума по сравнению с тепловым существенен лишь при относительно низких температурах проводника. В частности, для рассматриваемого выше медного проводника данное отношение

$$\left.\frac{\left\langle \delta J(t)\right\rangle_{thermal}}{\left\langle \delta J(t)\right\rangle_{shot}}\right|_{t\to\infty} = 0{,}11\cdot T_0^2$$

(температура — в кельвинах).

Дисперсия флуктуаций интенсивности излучения проводника, обусловленных дробовым шумом тока, при учете условия $\langle \delta J_1^2(t)\rangle \approx \langle \delta J^2(t)\rangle$, определяется соотношением

$$D_J(t) = \left\langle \delta J^2(t)\right\rangle - \left\langle \delta J(t)\right\rangle^2 = \\ = \frac{16}{11}\frac{\alpha e I_0^3 R_0^2}{\pi^2 r^2}\left(1 - \frac{1}{(1+\alpha t)^{11/3}}\right).$$

Отношение дисперсий установившихся флуктуаций, связанных с тепловым и дробовым шумом соответственно, с учетом выражения (3), равно

$$\left.\frac{D_{J\,thermal}(t)}{D_{J\,shot}(t)}\right|_{t\to\infty} = \frac{4k_B}{3elI_0R_0}T_0 .$$

Для рассматриваемого медного проводника

$$\left.\frac{D_{J\,thermal}(t)}{D_{J\,shot}(t)}\right|_{t\to\infty} = 0{,}2\cdot T_0 .$$

Как и для среднего значения интенсивности теплового излучения, вклад дробового шума тока проводника в дисперсию интенсивности существенен лишь при низких температурах.

Отметим существенную особенность статистических свойств флуктуаций интенсивности теплового излучения проводника, обусловленных дробовым шумом тока, по сравнению с аналогичными свойствами в случае теплового шума. Как видно из выражений для соответствующих характеристических функций (12) и (19), все нечетные моменты $\langle \delta J^n(t)\rangle$ равны нулю, если случайные изменения интенсивности излучения являются следствием тепловых колебаний тока, в то время как такие же моменты в случае дробовых шумов уже не равны нулю. В частности,

$$\left.\left\langle \left(\delta J - \langle \delta J\rangle\right)^3\right\rangle\right|_{t\to\infty} = \frac{16}{3}\frac{\alpha e I_0^4 R_0^3}{\pi^3 r^3}\left(\frac{3}{11}I_0 + \frac{2}{27}\alpha e\right).$$

Кроме того, моменты четвертого и более высокого четного порядка флуктуаций излучения в случае наличия дробового токового шума определяются уже не только моментом второго порядка, как это имеет место при тепловом шуме.

Таким образом, учет пуассоновского характера флуктуаций промежутков времени между прохождением по проводнику отдельных электронов, создающих ток, приводит к нестационарному негауссову характеру флуктуаций интенсивности теплового излучения такого проводника. Моменты третьего и более высокого порядка для флуктуаций интенсивности излучения претерпевают существенные изменения по сравнению с аналогичными характеристиками, получаемыми в том случае, если ток испытывает изменения, свойственные тепловому шуму. Кроме того, флуктуации излучения проводника, обусловленные дробовыми колебаниями тока, оказываются существенными лишь при относительно низких его температурах или малых средних токах.

Заключение

Проведенное описание модели теплового излучения проводника с током показывает, что наличие тепловых или дробовых токовых шумов, имеющих характер марковских процессов с независимыми приращениями, приводит уже к немарковскому типу флуктуаций интенсивности излучения проводника, к ее нестационарности и негауссовости. Полученные в работе результаты могут служить иллюстрацией того, что случайные процессы, происходящие в реальных физических объектах, являются в общем случае немарковскими процессами, а использование для их описания марковской модели следует рассматривать лишь как первое приближение.

Литература

1. *Морозов А.Н., Скрипкин А.В.* // Прикладная физика. 2011. № 3. С. 25.

2. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы.— М.: Наука, 1990.

3. *Морозов А.Н.* // Вестник МГТУ. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47.

4. *Morozov A.N., Skripkin A.V.* // Physics *Letters A.* 2011. V. 375. P. 4113.

5. *Морозов А.Н., Скрипкин А.В.* // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53. № 11. С. 55.

6. *Морозов А.Н., Скрипкин А.В.* // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 6. С. 1121.

7. *Морозов А.Н.* Необратимые процессы и броуновское движение.— М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Ба*умана, 1997.*

8. *Букингем М.* Шумы в электронных приборах и системах: Пер. с англ.— М.: Мир, 1986.

9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды.— М.: Наука, 1981.

10. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики.— М.: Наука, 1984.

11. *Лебедев А.И.* Физика полупроводниковых приборов.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

Thermal radiation of the conductor with a fluctuating current

A.N. Morozov and A.V. Skripkin

Bauman Moscow State Technical University
5 2-nd Baumanskaya str., Moscow, 105005, Russia
E-mail: skripkin@bmstu.ru

The process of thermal radiation of a cylindrical body, in which flows an electric current having a fluctuating component (in the form of white or shot noise) is considered. It is shown that random changes in radiation intensity are a non-Markov process. Statistical characteristics such intensity fluctuations, including the characteristic functions and spectral densities, are found.

PACS: 05.40.Ca, 44.40.+a
Keywords: thermal radiation, thermal noise, shot noise, intensity, non-Markov process.

Bibliography — 11 references *Received September 20, 2013*