

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ  
ИНСТИТУТ ТЕПЛО- и МАССООБМЕНА им. А. В. ЛЫКОВА  
Журнал основан в январе 1958 г.

---

*ТФЖ*

*И*  
*НЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ*  
**ЖУРНАЛ**

JOURNAL  
OF ENGINEERING PHYSICS  
AND THERMOPHYSICS

**Отдельный оттиск**  
**Offprint**

**Том 87, № 2**

**Vol. 87, No. 2**

МАРТ–АПРЕЛЬ  
MARCH–APRIL

2014

## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

УДК 519.21; 536.2

*А. Н. Морозов, А. В. Скрипкин***ФЛУКТУАЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО И ФОТОННОГО ГАЗОВ  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ МАЛОГО РАДИУСА**

*Исследованы равновесные флуктуации температуры молекулярного и фотонного газов в полости, ограниченной цилиндрической поверхностью и находящейся в конденсированной среде с высокой теплопроводностью. Показано, что указанные флуктуации относятся к классу немарковских случайных процессов и требуют для своего описания применения стохастических интегральных уравнений. Определены основные статистические характеристики изменения температуры полости, включая характеристические функции и спектральные плотности мощности флуктуаций.*

**Ключевые слова:** среда с микроструктурой, теплопроводность, немарковский процесс, интегральное стохастическое уравнение.

Необратимые процессы в среде с микроструктурой сопровождаются случайными изменениями их параметров и приводят к появлению наследственных свойств среды. Указанные изменения могут быть обусловлены термодинамическими течениями в среде, случайными изменениями ее кинетических коэффициентов и другими факторами.

Необходимость учета наследственных свойств среды с микроструктурой ограничивает применение по отношению к ней традиционного метода описания случайных необратимых процессов в конденсированных средах, использующего хорошо разработанную теорию дифференциальных стохастических систем и приводящего рассматриваемый процесс к марковскому виду [1]. Вместо такого подхода может быть использован метод интегральных стохастических операторов, учитывающий наследственность среды [2]. Сам необратимый процесс при таком описании становится немарковским случайным процессом.

Следует подчеркнуть, что исследование даже простейших необратимых процессов осуществляется с использованием линейных интегральных уравнений и немарковских флуктуаций, характеризующих изменение рассматриваемых величин. В частности, к таким явлениям относится движение сферической броуновской частицы в вязкой среде [3], теплопроводность и диффузия в среде, окружающей шарообразное или цилиндрическое тело [4, 5], люминесценция беккерелевского (Becquerel) типа [6] и другие процессы.

Отметим, что интегральные преобразования широко используются при описании теплопроводности. Их применение для нахождения аналитических решений краевых задач в бесконечной области, ограниченной цилиндрической поверхностью, выполнено в [7]. В работе [8] предлагается метод решения нелинейных нестационарных задач теплопроводности с помощью нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Настоящая работа посвящена исследованию флуктуаций температуры газа (молекулярного или фотонного), находящегося в трубке небольшого радиуса, ограниченной цилиндрической поверхностью, вокруг которой расположена среда с высокой теплопроводностью. Заметим, что исследование газа в сферической микрополости, окруженной средой с указанными свойствами, проведено в работе [9].

**Постановка задачи.** Рассматривается бесконечно длинная прямая цилиндрическая трубка малого радиуса  $R$ , окруженная сплошной неограниченной средой (жидкостью или твердым телом) с высокой теплопроводностью  $k$  и температуропроводностью  $\chi$  (рис. 1). Внутри трубки находится равновесное тепловое излучение (фотонный газ) при температуре  $T(t)$  и насыщенный пар (если среда находится в жидкой фазе), характеризующийся тепло-

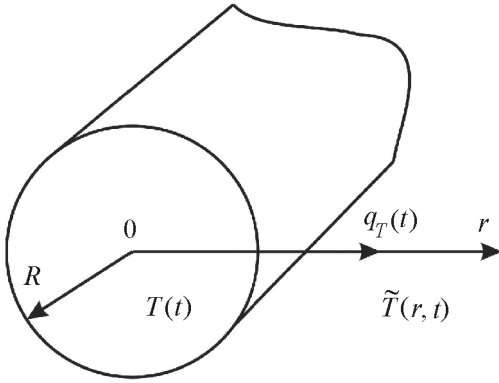


Рис. 1. Цилиндрическая трубка с газом в теплопроводящей среде

проводностью  $\kappa_v$ , температуропроводностью  $\chi_v$  и давлением  $p(T)$ , зависящим от температуры  $T(t)$  пара внутри трубки.

В результате постоянного испарения частиц жидкости в объем цилиндрической трубки, конденсации пара, излучения фотонов и их поглощения возникает перенос тепловой энергии через границу трубки в окружающую среду. В случае равновесия среднее значение теплового потока  $q_T(t)$ , связанного с таким переносом, равно нулю в течение достаточно продолжительного времени. Однако поток  $q_T(t)$  испытывает постоянные флуктуации, связанные со случайным изменением числа конденсирующихся (испаряющихся) частиц газа и фотонов.

Будем считать, что температура среды  $\tilde{T}(r, t)$  вне трубки зависит только от времени  $t$  и расстояния  $r$  до оси цилиндра и температура газа внутри цилиндра всюду одинакова и равна температуре его поверхности:  $T(t) = \tilde{T}(R, t)$ . Такие пред-

положения справедливы для рассматриваемого нами случая высокой теплопроводности среды, трубки малого радиуса и величин  $r/R$ , не очень сильно превышающих единицу.

Для функции  $\tilde{T}(r, t)$  справедливо уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \tilde{T}(r, t)}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}(r, t)}{\partial r} \right) \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$\tilde{T}(r, t)|_{t=0} = T_0, \quad \tilde{T}(r, t)|_{r=R} = T(t). \tag{2}$$

Тепловой поток  $q_T(t)$  через границу трубки определяется выражением

$$q_T(t) = - \frac{1}{2\pi R} \frac{dU(t)}{dt}, \tag{3}$$

где знак "минус" обусловлен выбранным положительным направлением потока из трубки в среду. Внутренняя энергия  $U(t)$  частиц пара внутри трубки определяется их общим числом  $N(t)$  (на единицу длины) и температурой  $T(t)$ :

$$U(t) = \frac{3}{2} N(t) k_B T(t). \tag{4}$$

Количество частиц  $N(t)$  может быть найдено из уравнения состояния, которое для не очень высоких температур принимает вид

$$p(t) = \frac{N(t)}{V_0} k_B T(t) = \frac{m_0}{\mu V_0} R_0 T(t). \tag{5}$$

Для определения зависимости  $p(T)$  будем считать пар в трубке насыщенным и воспользуемся уравнением Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dp(T)}{dT} = \frac{Q_{rel}}{V_m T}. \tag{6}$$

Выражая удельный объем среды в (5) как  $V_m = V_0/m_0$  и подставляя это выражение в (6), после интегрирования получаем выражение для зависимости давления насыщенного пара от температуры:

$$p(T) = p_0 \exp \left[ \frac{Q_{rel} \mu}{R_0} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right]. \tag{7}$$

С использованием этой формулы из (4) и (5) получаем следующее соотношение для внутренней энергии  $U(t)$  молекулярного пара, находящегося в объеме трубки единичной длины:

$$U(t) = \frac{3}{2} p_0 V_0 \exp \left[ \frac{Q_{\text{rel}} \mu}{R_0} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right].$$

Тогда тепловой поток  $q_T(t)$ , связанный с молекулярным переносом частиц газа через границу трубки, будет определяться соотношением

$$q_T(t) = - \frac{3}{4} \frac{Q_{\text{rel}} \mu p_0 R}{R_0 T^2} \exp \left[ \frac{Q_{\text{rel}} \mu}{R_0} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \frac{dT(t)}{dt}.$$

Считая изменения температуры газа в трубке малыми ( $|T(t) - T_0| \ll T_0$ ), последнее выражение приведем к виду

$$q_T(t) = - \frac{3}{4} \frac{Q_{\text{rel}} \mu p_0 R}{R_0 T^2} \frac{dT(t)}{dt}. \quad (8)$$

Аналогичная формула для теплового потока  $q_T(t)$ , обусловленного испусканием и поглощением фотонов, может быть получена с помощью соотношения для внутренней энергии равновесного теплового излучения, находящегося в объеме  $V_0$ :

$$U(t) = \frac{4\sigma}{c} T^4(t) V_0.$$

Отсюда для указанного потока находим

$$q_T(t) = - \frac{8\sigma R T_0^3}{c} \frac{dT(t)}{dt}. \quad (9)$$

Из полученных выражений (8) и (9) легко видеть, что тепловой поток  $q_T(t)$ , связанный как с переносом частиц пара, так и с переносом фотонов, может быть представлен формулой общего вида

$$q_T(t) = - \frac{1}{A} \frac{dT(t)}{dt}, \quad (10)$$

в которой величина  $A$  зависит от параметров задачи и равна  $A = \frac{4}{3} \frac{R_0 T_0^2}{Q_{\text{rel}} \mu p_0 R}$  для случая теплопереноса энергии частицами пара и  $A = \frac{c}{8\sigma R T_0^3}$  для случая переноса энергии фотонами.

**Стохастическое интегральное уравнение.** Тепловой поток  $q_T(t)$ , помимо найденной составляющей, связанной с температурой молекулярного или фотонного газа, находящегося в трубке, содержит, как отмечалось ранее, случайное слагаемое  $\xi_{q_T}(t)$ , связанное с флуктуациями количества частиц газа и температуры среды. Характер статистических свойств такого слагаемого зависит от конкретных условий задачи. В большинстве наиболее важных случаев случайную составляющую  $\xi_{q_T}(t)$  теплового потока  $q_T(t)$  через границу трубки можно считать белым шумом с интенсивностью  $\nu$  и средним значением  $\langle \xi_{q_T}(t) \rangle = 0$ . Разумеется, спектр такого шума ограничен некоторой частотой  $\omega_{\text{max}}$ , которой соответствует характерное время релаксации  $\tau_r = 1/\omega_{\text{max}}$ , оцениваемое как

$$\tau_r = \frac{R^2}{\chi_\nu} \quad (11)$$

для флуктуаций теплового потока, связанного с переносом частиц пара, или как

$$\tau_r = \frac{R}{c}, \quad (12)$$

если флуктуации теплового потока обусловлены излучением и поглощением фотонов.

Интенсивность  $\nu$  случайных изменений теплового потока  $\xi_{q_T}(t)$  также может быть оценена с использованием параметров задачи [10]. Для молекулярного и фотонного газов этот параметр определяется соотношениями

$$\nu = \frac{\kappa_V}{R^3} k_B T_0^2, \tag{13}$$

$$\nu = \frac{\sigma}{R^2} k_B T_0^5. \tag{14}$$

Проведем оценку величин, задаваемых соотношениями (11)–(14) для случая цилиндрической трубки радиуса  $R = 1$  мкм, внутри которой находится насыщенный водяной пар ( $\kappa_V = 0.02$  Вт/(К·м),  $\chi_V = 3.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с) при температуре  $T_0 = 300$  К. Для характерного времени  $\tau_T$  и интенсивности флуктуаций  $\nu$  теплового потока соответственно получим  $\tau_T = 2.9 \cdot 10^{-9}$  с и  $\nu = 0.025$  Дж<sup>2</sup>/(м<sup>4</sup>·с). Аналогичные оценки для фотонного газа дают  $\tau_T = 3 \cdot 10^{-15}$  с и  $\nu = 1.9 \cdot 10^{-6}$  Дж<sup>2</sup>/(м<sup>4</sup>·с). Найденные величины интенсивности показывают, что при наличии внутри трубки насыщенного молекулярного пара вклад во флуктуации теплового потока составляющей, обусловленной присутствием равновесного теплового излучения, мал. Данный факт позволяет пренебречь фотонной частью случайных изменений теплового потока при наличии молекулярной.

Приравнивая сумму потока  $q_T(t)$ , задаваемого выражением (10), и случайного потока  $\xi_{q_T}(t)$  общему соотношению для теплового потока через границу трубки

$$q_T(t) = -\kappa \left. \frac{\partial \tilde{T}(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R},$$

получим

$$-\kappa \left. \frac{\partial \tilde{T}(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{1}{A} \frac{dT(t)}{dt} - \xi_{q_T}(t). \tag{15}$$

Здесь знак перед случайным потоком  $\xi_{q_T}(t)$  определяется выбранным ранее положительным направлением потока.

Можно показать [11], что если в некоторый момент времени  $\tau$  на каждой единице длины рассматриваемой цилиндрической поверхности трубки мгновенно выделилось тепло  $Q(\tau)$ , то температура среды при  $r > R$  в момент времени  $t$  ( $t > \tau$ ) задается соотношением

$$\tilde{T}(r, t) = \frac{\chi}{\kappa} Q(\tau) G(r, R, t - \tau),$$

в котором функция Грина  $G(r, R, t - \tau)$  определяется как

$$G(r, R, t - \tau) = \frac{1}{4\pi\chi(t - \tau)} \exp\left(-\frac{r^2 + R^2}{4\chi(t - \tau)}\right) I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t - \tau)}\right).$$

Пользуясь тем, что  $Q(\tau)\delta(t - \tau) = 2\pi R q_T(t)$ , для температуры среды  $\tilde{T}(r, t)$  на расстоянии  $r$  от оси трубки для случая произвольного теплового потока  $q_T(t)$  через ее поверхность получим

$$\tilde{T}(r, t) = \frac{R}{2\kappa} \int_0^t \frac{q_T(\tau)}{t - \tau} \exp\left(-\frac{r^2 + R^2}{4\chi(t - \tau)}\right) I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t - \tau)}\right) d\tau. \tag{16}$$

Найдем из выражения (16) производную  $\frac{\partial \tilde{T}(r, t)}{\partial r}$ , пользуясь равенством  $\frac{\partial I_0(z)}{\partial z} = I_1(z)$  [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}(r, t)}{\partial r} &= \\ &= \frac{R}{4\chi\kappa} \int_0^t \frac{q_T(\tau)}{(t - \tau)^2} \exp\left(-\frac{r^2 + R^2}{4\chi(t - \tau)}\right) \left[ R I_1\left(\frac{Rr}{2\chi(t - \tau)}\right) - r I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t - \tau)}\right) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Найденная производная, после ее подстановки в соотношение (15), при учете (10) приводит к стохастическому интегральному уравнению Вольтерра (Volterra) второго рода

$$Z(t) + \int_0^t K_0(t - \tau) Z(\tau) d\tau = -A\xi_{q_T}(t), \quad (17)$$

в котором введены следующие обозначения для скорости изменения температуры газа в трубке и ядра интегрального уравнения  $K_0(t)$  :

$$Z(t) = \frac{dT(t)}{dt},$$

$$K_0(t - \tau) = \frac{R^2}{4\chi(t - \tau)^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\chi(t - \tau)}\right) \left[ I_1\left(\frac{R^2}{2\chi(t - \tau)}\right) - I_0\left(\frac{R^2}{2\chi(t - \tau)}\right) \right]. \quad (18)$$

В связи с тем, что распространение тепла в пространстве, окружающем цилиндрическую трубку с находящимся в ней молекулярным или фотонным газом, описывается интегральным уравнением (17), не сводимым к конечной системе дифференциальных уравнений, флуктуации величины  $Z(t)$  и, следовательно, величин  $T(t)$  и  $q_T(t)$  можно классифицировать как случайные немарковские процессы. Это означает, что случайные изменения указанных величин обладают наследственными свойствами — их статистические характеристики, начиная с некоторого времени  $\tau$ , зависят от поведения этих функций при  $t < \tau$ .

**Решение интегрального стохастического уравнения.** Рассматриваемый нами случай трубки малого радиуса с газом (условие  $\frac{R^2}{\chi} \ll \delta t$ , где  $\delta t$  — характерное время, соответствующее времени свободного движения частиц молекулярного газа или времени движения фотонов на длине, равной расстоянию между соседними частицами в фотонном газе) позволяет разложить экспоненты и функции Бесселя в (18) в ряд с удержанием лишь первых двух слагаемых. Дополнительное физическое условие  $t - \tau > \delta t$  для ядра  $K_0(t - \tau)$  позволяет записать выражение

$$K_0(t - \tau) = -\frac{R^2}{4\chi(t - \tau)^2}.$$

Тогда исходное интегральное уравнение (17) приводится к виду

$$Z(t) - \frac{R^2}{4\chi} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^2} Z(\tau) d\tau = -A\xi_{q_T}(t). \quad (19)$$

Уравнение (19) может быть записано с использованием его резольвенты:

$$Z(t) = A\xi_{q_T}(t) + A \int_0^t F(t - \tau) \xi_{q_T}(\tau) d\tau, \quad (20)$$

где функция  $F(t - \tau)$  определяется рекуррентным соотношением

$$F(t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t - \tau), \quad (21)$$

в котором

$$F_1(t - \tau) = \frac{R^2}{4\chi} \frac{1}{(t - \tau)^2}, \quad F_n(t - \tau) = \int_{\tau + \delta t}^{t - \delta t} F_1(t - s) F_{n-1}(s - \tau) ds, \quad n > 1.$$

Указанное выше условие малого радиуса делает ряд (21) быстро сходящимся. Неравенство  $\frac{R^2}{\chi} \ll \delta t$  оставляет лишь первое слагаемое ряда (21). Тогда решение, задаваемое уравнением (20), записывается в виде

$$Z(t) = A\xi_{q_T}(t) + \frac{AR^2}{4\chi} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^2} \xi_{q_T}(\tau) d\tau. \quad (22)$$

**Статистические характеристики.** Найденное интегральное стохастическое уравнение (22) позволяет найти любые статистические характеристики процесса  $Z(t)$ , воспользовавшись разработанным в [13] методом описания немарковских процессов, задаваемых линейными интегральными преобразованиями. Учитывая, что случайный тепловой поток  $\xi_{qT}(t)$  представляет собой белый шум с интенсивностью  $\nu$ , для одномерной  $g_1(\lambda, t)$  и многомерных  $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L, t_1, \dots, t_L)$  характеристических функций получаем

$$g_1(\lambda, t) = \exp \left[ -\frac{1}{96} \frac{\nu A^2 R^4 \lambda^2}{\chi^2} \left( \frac{1}{\delta t^3} - \frac{1}{t^3} \right) \right], \tag{23}$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L, t_1, \dots, t_L) = \tag{24}$$

$$= \exp \left[ -\frac{1}{48} \frac{\nu A^2 R^4}{\chi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^L \frac{\lambda_k \lambda_l}{(t_l - t_k)^2} \left( \frac{1}{\delta t} + \frac{t_k^2 - t_l^2 + t_k t_l}{t_k t_l (t_l - t_k)} + \frac{2}{t_l - t_k} \ln \frac{t_l \delta t}{t_k (t_l - t_k)} \right) \right].$$

Графики функции  $g_1(\lambda, t)$ , задаваемой уравнением (23), изображены на рис. 2 для разных значений  $t$ . Здесь и в дальнейшем в качестве примеров использованы цилиндрические трубки малого радиуса, помещенные в воду ( $R = 10^{-6}$  м,  $\nu = 2.5 \cdot 10^4$  Дж<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>·с,  $\chi = 2 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $A = 2.1 \cdot 10^6$  К·м<sup>2</sup>/Дж).

Характеристические функции (23) и (24) дают возможность определить любые статистические характеристики процесса  $Z(t)$ . В частности, математическое ожидание  $\langle Z(t) \rangle$  и дисперсия  $D_Z(t)$  задаются равенствами

$$\langle Z(t) \rangle = \left. \frac{\partial g_1(\lambda, t)}{i \partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0,$$

$$D_Z(t) = \langle Z^2(t) \rangle = - \left. \frac{\partial^2 g_1(\lambda, t)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{48} \frac{\nu A^2 R^4}{\chi^2} \left( \frac{1}{\delta t^3} - \frac{1}{t^3} \right),$$

Установившемуся процессу теплопроводности, для которого  $t \rightarrow \infty$ , соответствует стационарное значение дисперсии скорости изменения температуры газа в трубке:

$$D_Z(t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{48} \frac{\nu A^2 R^4}{\chi^2 \delta t^3}. \tag{25}$$

Корреляционная функция  $K(t_1, t_2) = \langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle$  может быть получена из двумерной характеристической функции  $g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)$  с помощью формулы (24) при  $L = 2$ :

$$K(t_1, t_2) = - \left. \frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right|_{\substack{\lambda_1=0 \\ \lambda_2=0}} = \tag{26}$$

$$= \frac{1}{96} \frac{\nu A^2 R^4}{\chi^2} \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \left[ \frac{1}{\delta t} + \frac{t_1^2 - t_2^2 + t_1 t_2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} + \frac{2}{t_2 - t_1} \ln \frac{t_2 \delta t}{t_1 (t_2 - t_1)} \right].$$

В частности, установившемуся процессу ( $t_1 \rightarrow \infty, t_2 \rightarrow \infty$ ) соответствует стационарная корреляционная функция  $K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau)$  вида

$$K(\tau) = \frac{1}{96} \frac{\nu A^2 R^4}{\chi^2 \tau^2} \left( \frac{1}{\delta t} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta t}{\tau} \right). \tag{27}$$

При  $\tau = \delta t$ , из формулы (27) следует выражение (25). Графики функции  $K(t - \tau, t)$ , задаваемой соотношением (26), изображены на рис. 3 для различных значений параметра  $t$ . Соотношение (26) для корреляционной функции  $K(t_1, t_2)$  позволяет найти одностороннюю спектральную плотность процесса  $Z(t)$  с помощью определения

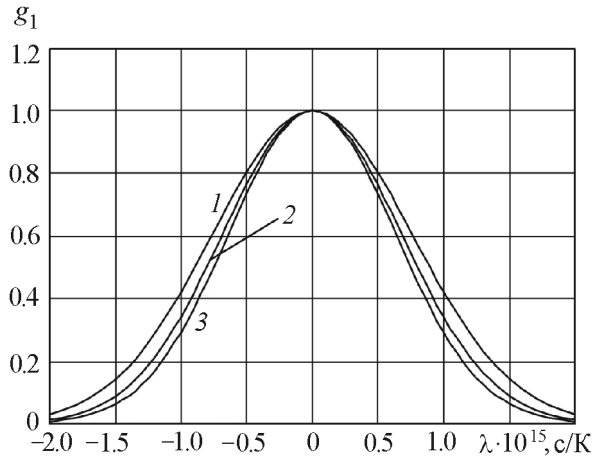


Рис. 2. Графики функции  $g_1(\lambda, t)$ , задаваемой уравнением (23): 1 —  $t = 1.5 \delta t$ ; 2 —  $t = 2.0 \delta t$ ; 3 —  $t = \infty$

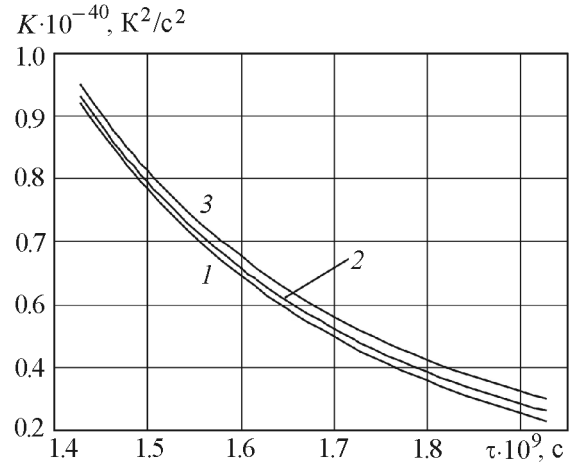


Рис. 3. Графики функции  $K(t - \tau, t)$ , задаваемой уравнением (26). Значения времени  $t$  такие же, как на рис. 2

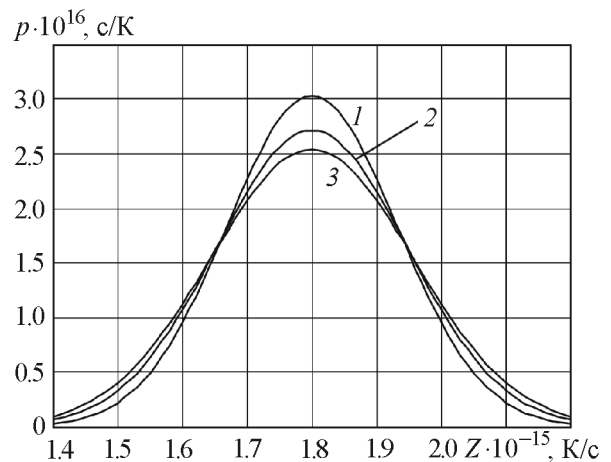
$$G_Z(\omega, t) = 2 \int_0^t K(t - \tau, t) \cos \omega \tau d\tau .$$

Для одномерной функции плотности вероятности  $p(Z, t)$  получаем выражение

$$p(Z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda, t) \exp(-i\lambda Z) d\lambda = \sqrt{\frac{1}{2\pi D_Z(t)}} \exp\left(-\frac{Z^2}{2D_Z(t)}\right). \tag{28}$$

На рис. 4 изображена зависимость (28) для различных значений  $t$ . Легко видеть, что с течением времени график плотности вероятности флуктуаций скорости изменения температуры газа в трубке  $Z(t)$  "размазывается" вдоль оси  $Z$ , стремясь к стационарной гауссовой кривой при  $t \rightarrow \infty$ .

Рис. 4. Графики функции плотности вероятности  $p(Z, t)$ , задаваемой уравнением (28). Значения времени  $t$  такие же, как на рис. 2





**Заключение.** Описание флуктуаций физических величин, характеризующих процесс теплопроводности в среде, содержащей микротрубки, требует применения интегральных стохастических уравнений, а сами флуктуации представляют собой немарковские случайные процессы. Полученные результаты имеют значение при описании случайных флуктуаций температуры в средах с микроструктурой.

### Обозначения

$c$  — скорость света в вакууме,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $D_Z(t)$  — дисперсия скорости изменения температуры газа в трубке,  $\text{К}^2\cdot\text{с}^{-2}$ ;  $G(r, R, t)$  — функция Грина,  $\text{м}^{-2}$ ;  $I_0(x)$  и  $I_1(z)$  — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков;  $i$  — мнимая единица;  $K(t_1, t_2)$  и  $K(\tau)$  — корреляционная и стационарная корреляционная функции скорости изменения температуры газа в трубке,  $\text{К}^2\cdot\text{с}^{-2}$ ;  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $\text{Дж}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $m_0$  — масса газа в объеме трубки единичной длины,  $\text{кг}$ ;  $N(t)$  — число частиц в трубке, приходящееся на единицу ее длины,  $\text{м}^{-1}$ ;  $p(T)$  и  $p_0$  — давления насыщенного пара в трубке при температурах  $T$  и  $T_0$ ,  $\text{Па}$ ;  $p(Z, t)$  — одномерная функция плотности вероятности для скорости изменения температуры газа в трубке,  $\text{К}^{-1}\cdot\text{с}$ ;  $Q(\tau)$  — тепло, мгновенно выделяемое на единице длины цилиндрической поверхности трубки,  $\text{Дж}\cdot\text{м}^{-1}$ ;  $Q_{\text{rel}}$  — удельная теплота парообразования жидкости, окружающей трубку,  $\text{Дж}\cdot\text{кг}^{-1}$ ;  $q_T(t)$  — тепловой поток через поверхность трубки,  $\text{Дж}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $R$  — радиус цилиндрической трубки,  $\text{м}$ ;  $R_0$  — газовая постоянная,  $\text{Дж}\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $r$  — расстояние от оси трубки,  $\text{м}$ ;  $T(t)$  — температура газа внутри трубки,  $\text{К}$ ;  $T_0$  — начальная температура газа в трубке,  $\text{К}$ ;  $\tilde{T}(r, t)$  — температура среды, окружающей трубку,  $\text{К}$ ;  $t$  — время,  $\text{с}$ ;  $U(t)$  — внутренняя энергия газа в трубке, приходящаяся на единицу ее длины,  $\text{Дж}\cdot\text{м}^{-1}$ ;  $V_0$  — объем трубки единичной длины,  $\text{м}^3$ ;  $V_m$  — удельный объем (объем единицы массы),  $\text{м}^3$ ;  $Z(t)$  — скорость изменения температуры газа в трубке,  $\text{К}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\delta t$  — характерное время, соответствующее времени свободного движения частиц молекулярного газа или времени движения фотонов на длине, равной расстоянию между соседними частицами в фотонном газе,  $\text{с}$ ;  $\kappa$  и  $\kappa_v$  — коэффициенты теплопроводности среды, окружающей трубку, и насыщенного пара, находящегося в трубке,  $\text{Дж}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\lambda$  — параметр характеристической функции,  $\text{с}/\text{К}$ ;  $\mu$  — молярная масса газа в трубке,  $\text{кг}\cdot\text{моль}^{-1}$ ;  $\nu$  — интенсивность случайного теплового потока через поверхность трубки,  $\text{Дж}^2\cdot\text{м}^{-4}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\xi_{q_T}(t)$  — случайный тепловой поток через поверхность трубки,  $\text{Дж}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана,  $\text{Дж}\cdot\text{К}^{-4}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\tau$  и  $\tau_r$  — время и характерное время релаксации флуктуаций теплового потока через поверхность трубки,  $\text{с}$ ;  $\chi$  и  $\chi_v$  — коэффициенты температуропроводности среды, окружающей трубку и насыщенного пара, находящегося в трубке,  $\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\omega$  и  $\omega_{\text{max}}$  — частота и частота, ограничивающая спектр мощности случайного теплового потока через поверхность трубки;  $\text{с}^{-1}$ .  
Индексы:  $r$  — релаксация;  $\text{rel}$  — относительный.

### Литература

1. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. *Стохастические дифференциальные системы*. Москва: Наука, 1990.
2. Морозов А. Н. *Необратимые процессы и броуновское движение*. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997.
3. Morozov A. N. and Skripkin A. V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Phys. Lett. A*. 2011. Vol. 375. Pp. 4113–4115.
4. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Распространение тепла в пространстве вокруг цилиндрической поверхности как немарковский случайный процесс. *Инженерно-физический журнал*. 2011. Т. 84, № 6. С. 1121–1127.
5. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Описание испарения сферической частицы жидкости как немарковского случайного процесса с использованием интегральных стохастических уравнений. *Изв. вузов. Физика*. 2010. Т. 53, № 11. С. 55–64.
6. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Описание флуктуаций интенсивности люминесценции как немарковского случайного процесса. *Нелинейный мир*. 2010. Т. 8, № 9. С. 545–553.
7. Карташов Э. М. Об одном классе интегральных преобразований для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности. *Инженерно-физический журнал*. 2008. Т. 81, № 1. С. 123–130.
8. Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В. Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности. *Инженерно-физический журнал*. 2008. Т. 81, № 6. С. 1058–1063.
9. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Равновесные флуктуации температуры молекулярного и фотонного газов в сферической микрополости. *Изв. вузов. Физика*. 2012. Т. 55, № 7. С. 9–18.
10. Климонтович Ю. Л. *Статистическая физика*. Москва: Наука, 1982.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука, 1977.
12. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. *Специальные функции математической физики*. Москва: Наука, 1984.
13. Морозов А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием. *Вестн. МГТУ. Естественные науки*. 2004. № 3. С. 47–56.