НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. ISSN 1994-0408

Прохождение жидкости со случайной скоростью через среду, заполненную частицами-гранулами

08, август 2014

DOI: 10.7463/0814.0724713

Морозов А. Н.[1], **Скрипкин А. В.**[1,a]

УДК 532.542

[1]Россия, МГТУ им. Баумана

[a]skripkin@bmstu.ru

Рассматривается течение в общем случае неоднородной по плотности жидкости через цилиндрическую трубу круглого сечения, заполненную частицами-гранулами, размеры которых значительно превышают размеры частиц жидкости. При этом предполагается, что скорость течения жидкости обладает случайной компонентой, вызванной некоторыми внешними причинами. Показано, что в простейшем случае постоянной концентрации частиц-гранул задача сводится к аналогичной задаче теплопроводности. Найдены статистические характеристики течения жидкости в этом случае. Отмечен факт сильной зависимости флуктуаций плотности жидкости от отношения коэффициента диффузии и площади сечения трубки. Указано, что в первом приближении решение справедливо и при слабонеоднородном распределении гранул.

Ключевые слова: диффузия, частицы-гранулы, немарковский процесс

1. Введение

Традиционные задачи диффузии и гидродинамики решаются обычно общепринятыми методами, хорошо разработанными за последнее время [1]. Для линеаризованного уравнения Навье-Стокса и уравнения теплопроводности существует множество как аналитических, так и численных методов решения. Любые процессы в физических системах сопровождаются флуктуациями. Их исследование традиционными методами приводит к марковскому характеру изменения соответствующих величин.

Однако, как показывают даже относительно простые задачи, связанные с диффузией, гидродинамикой или теплопроводностью [2, 3], традиционные подходы могут оказаться лишь первым приближением. В частности, марковский характер классических задач при более детальном рассмотрении оказывается уже немарковским [4]. Так, например, известное броуновское движение при учете увлечения броуновской частицей окружающих ее частиц проявляет немарковский характер [5]. Интенсивность люминесценции, затухание которой происходит по беккерелевскому типу, имеет немарковский характер [6]. Вообще говоря, марковскую модель следует считать лишь наиболее простой моделью, хотя она, безусловна, эффективна во многих случаях и дает тогда результат более простым путем.

Предлагаемая работа посвящена исследованию потока жидкости с флуктуирующей составляющей скорости через цилиндрическую трубу заполненную частицами-гранулами. Найдены статистические характеристики скорости жидкости, если первоначально они соответствовали характеристикам белого шума. Заметим, что вопросы распространения жидких и газообразных веществ в средах, содержащих крупные частицы, а также в пористых средах, активно обсуждаются в научной литературе последние несколько десятков лет. В частности, в работе [7] исследуется течение жидкости в среде с порами, которые рассматриваются как ловушки; статья [8] рассматривает частицы-гранулы как соответствующую броуновскую решетку. При этом происходит взаимодействие частиц движущейся жидкости и таких броуновских частиц. Заметим также, что в последнее время вместо частиц-гранул активно изучаются другие типы объектов, находящихся в жидкой среде, например, волокна [9].

2. Постановка задачи

Рассмотрим прямую трубку постоянного кругового сечения *S*, заполненную жидкостью, в общем случае с непостоянной плотностью, и направим ось *Ox* вдоль оси трубки (рис. 1).

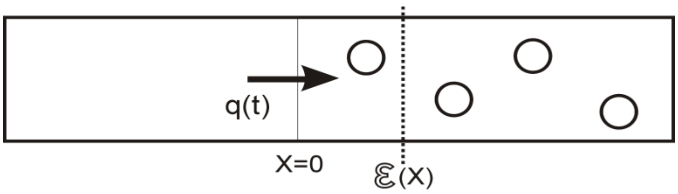

Рис 1. К постановке задачи

Будем считать, что при $x>0$ в ней содержатся частицы-гранулы, создающие раствор суспензии, причем в общем случае концентрация частиц-гранул будет зависеть от расстояния вдоль трубки: $N=N(x)$ (зависимостью от времени пренебрегаем). Величиной, способной охарактеризовать степень пористости, может являться отношение

$$\varepsilon(x)=\frac{S_0(x)}{S}, \tag{1}$$

где $S_0(x)$ – площадь сечения, не занятая гранулами, *S* – общая площадь сечения трубки. В случае гомогенной среды величину $\varepsilon(x)$ можно считать постоянной.

В работе [10], исходя из уравнения непрерывности, показано, что в указанных условиях диффузионное уравнение для концентрации частиц движущейся в трубке жидкости имеет вид

$$\varepsilon(x)\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где D – коэффициент диффузии (который, вообще говоря, тоже зависит от расстояния вдоль трубки, но мы этим фактом пренебрегаем).

Начальные и граничные условия для уравнения (2) имеют вид:

$$n(0,t)=n_0(t), \qquad (3)$$

$$n(x,0)=0. \qquad (4)$$

Первым условием мы предполагаем, что плотность жидкости может в общем случае меняться, а вторым условием мы формально считаем появление жидкости в трубке в начальный момент времени.

Дополним выражения (2) – (4) уравнением для потока жидкости через сечение $x=0$, при этом учтем тот факт, что течение жидкости всегда сопровождается случайной составляющей, вызванной, например, изменениями давления или температуры, а также плотности жидкости. Поэтому для указанного потока числа частиц $q(t)$ запишем соотношение

$$q(t)=-D\left.\frac{\partial n(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}+\xi_q(t). \qquad (5)$$

Здесь $\xi_q(t)$ – указанный случайный поток, который мы будем считать белым шумом с интенсивностью ν.

3. Случай гомогенной среды

Если распределение гранул в среде не зависит от расстояния вдоль оси трубки ($\varepsilon(x)=\varepsilon=\mathrm{const}$), то поставленная задача (2) – (5) может быть полностью решена. Решение дифференциального уравнения (2) с граничным и начальным условием (3) и (4) имеет вид [11]

$$n(x,t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi D}}\int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\varepsilon x^2}{4D(t-\tau)}\right]n_0(\tau)d\tau, \quad x>0. \qquad (6)$$

Продифференцировав последнее выражение по координате *x*, получим уравнение для частной производной плотности жидкости

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial x}=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi D}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-\frac{\varepsilon x^2}{4D(t-\tau)}\right]\frac{dn_0(\tau)}{d\tau}d\tau\,, \qquad (7)$$

откуда для потока (5) находим

$$q(t)=-\sqrt{\frac{D}{\pi\varepsilon}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\frac{dn_0(\tau)}{d\tau}d\tau+\xi_q(t), \qquad (8)$$

Полученная формулы не сводятся к конечной системе дифференциальных уравнений, а поэтому прохождение жидкости через трубку с частицами –гранулами будет относится к немарковскому процессу [2].

Заметим, что формулы (6) и (7) соответствуют обычному диффузионному процессу в полупространстве с коэффициентом диффузии D/ε, что связано с наличием частиц-гранул в среде.

В том случае, если флуктуациями потока жидкости можно пренебречь, а основной вклад в изменение его будет лежать во флуктуациях плотности жидкости (имеющих характер белого шума с интенсивностью σ), то проводя преобразование Лапласа (8), можно найти спектральную плотность мощности флуктуаций потока, связанных с такими изменениями плотности. Учитывая, что спектральная плотность мощности флуктуаций потока частиц жидкости определяется равенством $G_q(\omega)=\left|\tilde{q}(i\omega)\right|^2$, где $\tilde{q}(p)$ – преобразование Лапласа по времени функции $q(t)$, p – параметр преобразования, принимая во внимание также, что спектральная плотность мощности белого шума равна его интенсивности, т.е. $\left|\tilde{n}_0(i\omega)\right|^2=\sigma$, для спектральной плотности мощности флуктуаций потока жидкости получим

$$G_q(\omega)=\frac{D\sigma\omega}{\varepsilon}. \tag{9}$$

Таким образом, в этом случае флуктуации потока будут относиться к синему шуму, являющемуся производной от фликкер-шума.

Заметим, что аналогичные выражениям (6) и (7) соотношения были получены в задачах теплопроводности и диффузии вблизи плоской поверхности в другой работе [12]

Спектральная плотность мощности флуктуаций изменения концентрации жидкости (связанная с изменением плотности) определяется с помощью метода, используемого выше для получения функции (9), и у нулевого сечения имеет вид

$$G_n(\omega)=\frac{\nu}{\omega\left(\omega+\sqrt{\frac{2D\omega}{\varepsilon S}}+D/\varepsilon S\right)}. \tag{10}$$

Эта формула также аналогична полученным в работе [11] выражениям, относящимся к другим задачам. Эта аналогия может быть обоснована тем, что если касательную силу, действующую со стороны жидкости на единицу площади поверхности, $F=M\frac{dV}{dt}$ из [12] заменить на соотношение $Q=S\frac{dn}{dt}$, где Q – общее количество частиц жидкости, прошедшее за время dt через сечение трубки, то формулы переходят одна в другую. Из формулы (10) легко видеть, что при малых площадях сечения трубки спектральная плотность $G_n(\omega)$ принимает характер фликкер-шума. Отметим также, что спектральная плотность (10) сильно зависит от отношения D/S, ввиду чего при плавном увеличении площади поперечного сечения трубки мощность флуктуаций количества проходящих частиц жидкости может проявлять характер некоторых пульсаций (это, в частности, видно из рис. 2, на котором изображены графики функции (10) при разных S).

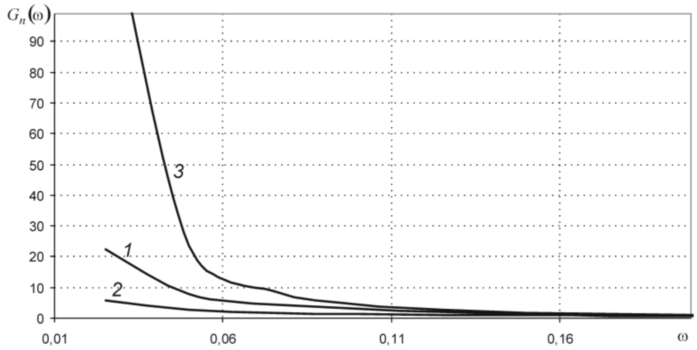

Рис. 2. Графики спектральной плотности флуктуаций числа проходящих по трубке частиц при $S = 1{,}5\,мм^2$ (1), $S = 1{,}6\,мм^2$ (2), $S = 1{,}75\,мм^2$ (3)

Заметим, наконец, что если функция $\varepsilon(x)$ крайне медленно зависит от координаты *x*: $\varepsilon(x) = a + bx$, $|b| << 1$, то все полученные выше формулы верны в первом приближении и в этом случае. В них следует заменить величину ε на записанные выражения для $\varepsilon(x)$. Разумеется, все это справедливо при не очень больших *x*.

4. Заключение

Рассмотренная в работе элементарная модель прохождения жидкости через среду с гранулами показывает, что законы классической стохастической гидродинамики могут считаться лишь первым приближением. Более точное описание дает теория немарковских процессов.

Список литературы

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.
2. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Описание испарения сферической частицы жидкости как немарковского случайного процесса с использованием интегральных стохастических уравнений // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53, № 11. С. 55-64. [Morozov A.N., Skripkin A.V. Description of evaporation of a spherical liquid drop by a non-Markovian random process based on integral stochastic equations // Russian Physics Journal. 2011. Vol. 53, no. 11. P. 1167-1178. DOI: 10.1007/s11182-011-9546-y]
3. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Распространение тепла в пространстве вокруг цилиндрической поверхности как немарковский случайный процесс // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 6. С. 1121-1127. [Morozov A.N., Skripkin A.V. Propagation of heat in the space around a cylindrical surface as a non-Markovian random process // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2011. Vol. 84, no. 6. P. 1201-1208. DOI: 10.1007/s10891-011-0585-6]

4. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.
5. Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // Physics Letters A. 2011. Vol. 375, iss. 46. P. 4113- 4115. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.10.001
6. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Описание флуктуаций интенсивности люминесценции как немарковского случайного процесса // Нелинейный мир. 2010. Т. 8, № 9. С. 545-553.
7. Margolin G., Berkowitz B. Application of Continuous Time Random Walks to Transport in Porous Media // Journal of Physical Chemistry B. 2000. Vol. 104. P. 3492-3497.
8. Учайкин В.В., Учайкин Д.В. Броуновская ловушка // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9. С. 477-478.
9. Logvinova K., Neel M.-C. A Fractional Equation for Anomalous Diffusion in a Randomly Heterogeneous Porous Media // Chaos. 2014. Vol. 14. P. 982- 987. DOI: 10.1063/1.1796211
10. Erochenkova G., Lima R. A Fractional Diffusion Equation for a Marker in Porous Media // Chaos. 2011. Vol. 11. P. 495. DOI: 10.1063/1.1391450
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
12. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Применение уравнения Вольтерра второго рода для описания вязкого трения и теплопроводности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 3. С. 62-71.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. ISSN 1994-0408

Passing of Liquid from the Random Velocity Through Medium Filled by Particles-Granules

 # 08, August 2014

DOI: 10.7463/0814.0724713

A.N. Morozov[1], A.V. Skripkin[1,a]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

[a]skripkin@bmstu.ru

Keywords: diffusion, non-Markov process, particles-granules

The article discusses in passing the particles generally inhomogeneous density fluid through the tube in which the particles are granules, the dimensions of which are much exceed size liquid particles. It is assumed that the liquid is exposed to external interference, which leads to the presence of the velocity fluctuations of liquid particles. The aim of this work is to statistical characteristics of liquid density in these conditions, including the power spectral densities of the density fluctuations, and to identify the statistical characteristics considered depending on the cross-sectional area of the tube. For this problem, we obtain an equation similar to diffusion. His solution for additional initial and boundary conditions led to a stochastic integral equation for the density of the liquid. Using the method of description of stochastic systems described by linear integral transforms it possible to obtain the necessary characteristics of the process. It turned out that the low-frequency fluctuations in the density of the liquid have the character of flicker noise (pink noise). Moreover, due to the strong dependence of the behavior of the fluid and the diffusivity ratio of the cross sectional area of the tube, the power spectral density of the density fluctuations are not dependent on the cross-sectional area continuously, but undergoes a kind of "oscillation". It is also shown that if the distribution of particle beads in an medium is not homogeneous and is weakly dependent on the distance along the tube axis, it is still possible to use the first approximation results for the homogeneous distribution of the particles of the granules. To do this, the formulas obtained granules distribution parameter should be replaced with the corresponding function. The results obtained can be used in problems of fluid flow in pipes and suspensions, as well as issues of hydraulic engineering.

References

1. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy* [Stochastic differential systems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 632 p. (in Russian).
2. Morozov A.N., Skripkin A.V. Description of evaporation of a spherical liquid drop by a non-Markovian random process based on integral stochastic equations. *Izvestiia vuzov. Fizika*, 2010, vol. 53, no. 11, pp. 55-64. (English translation: *Russian Physics Journal*, 2011, vol. 53, no. 11, pp. 1167-1178. DOI: 10.1007/s11182-011-9546-y)
3. Morozov A.N., Skripkin A.V. Propagation of heat in the space around a cylindrical surface as a non-Markovian random process. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2011, vol. 84, no. 6, pp. 1121-1127. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011, vol. 84, no. 6, pp. 1201-1208. DOI: 10.1007/s10891-011-0585-6)
4. Morozov A.N. *Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie* [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 332 p. (in Russian).
5. Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Physics Letters A*, 2011, vol. 375, iss. 46, pp. 4113- 4115. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.10.001
6. Morozov A.N., Skripkin A.V. Description of Luminescence Intensity Fluctuations as Non-Markovian Random Process. *Nelineinyi mir*, 2010, vol. 8, no. 9, pp. 545-553. (in Russian).
7. Margolin G., Berkowitz B. Application of Continuous Time Random Walks to Transport in Porous Media. *Journal of Physical Chemistry B*, 2000, vol. 104, pp. 3492-3497.
8. Uchaikin V.V., Uchaikin D.V. Brownian trap. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*, 2002, vol. 9, pp. 477-478. (in Russian).
9. Logvinova K., Neel M.-C. A Fractional Equation for Anomalous Diffusion in a Randomly Heterogeneous Porous Media. *Chaos*, 2014, vol. 14, pp. 982- 987. DOI: 10.1063/1.1796211
10. Erochenkova G., Lima R. A Fractional Diffusion Equation for a Marker in Porous Media. *Chaos*, 2011, vol. 11, pp. 495. DOI: 10.1063/1.1391450
11. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 736 p. (in Russian).
12. Morozov A.N., Skripkin A.V. Application of 2nd Order Volterra Equation for Description of Viscous Friction and Heat Conduction. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2006, no. 3, pp. 62-71. (in Russian).